

# ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI *GENERALIZED EXTREME VALUE* (GEV) (Studi kasus : Identifikasi Perubahan Iklim di Jakarta)

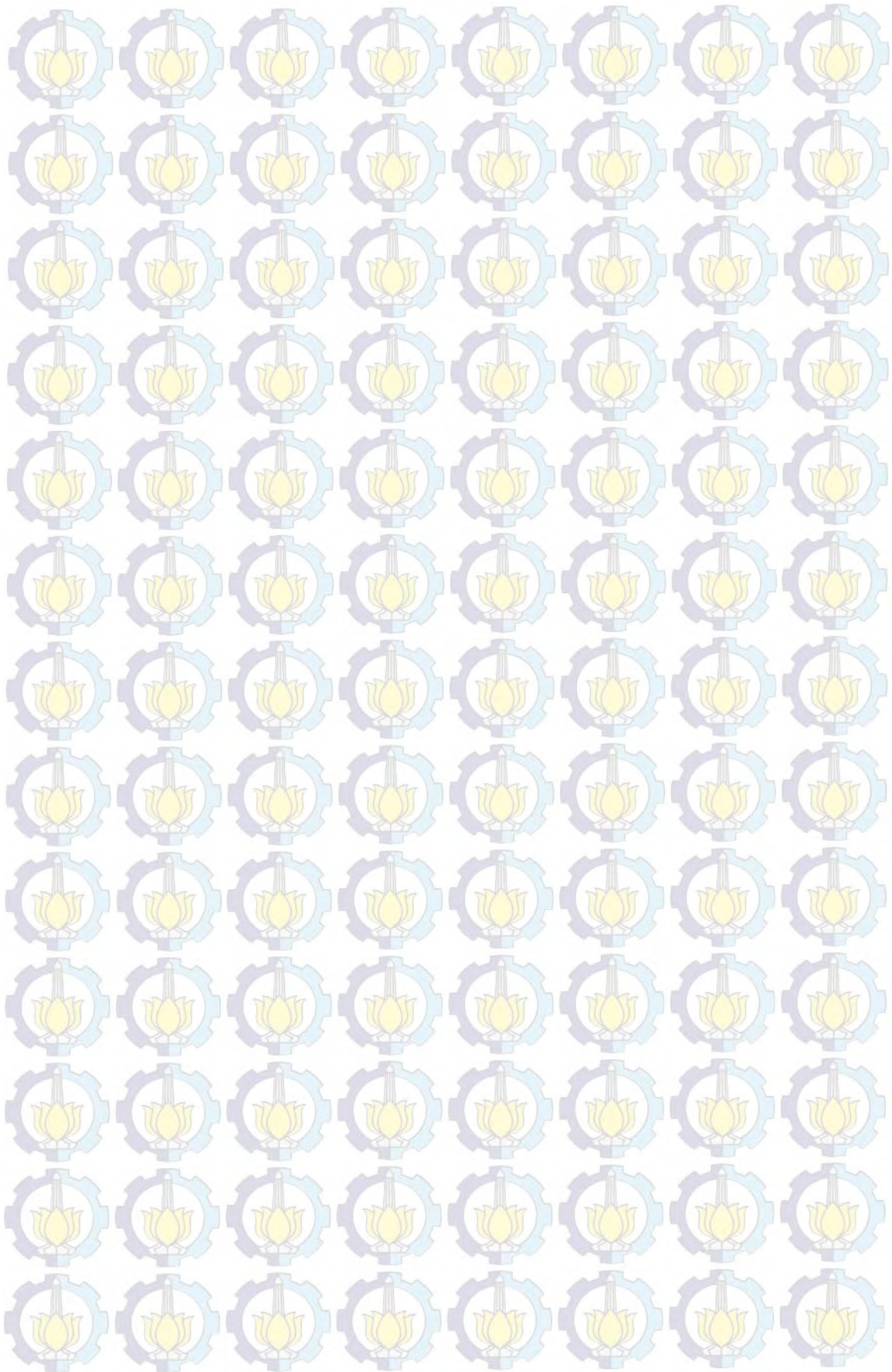
Nama mahasiswa : Anita Rahayu  
NRP : 1310 201 003  
Pembimbing : Dr. Sutikno, S.Si, M.Si  
Dr. Purhadi, M.Sc

## ABSTRAK

Perubahan cuaca dan iklim ekstrem merupakan permasalahan yang sulit untuk dihindari dan memberikan dampak yang sangat merisaukan terhadap berbagai segi kehidupan. Pengetahuan tentang perilaku nilai-nilai ekstrem sangat penting untuk meminimalkan dampak tersebut dan salah satu metode yang digunakan adalah *Extreme Value Theory* (EVT). Terdapat dua metode dalam mengidentifikasi *extreme value*, yaitu *Block Maxima* dengan pendekatan *Generalized Extreme Value* (GEV) dan *Peaks Over Threshold* (POT) dengan pendekatan *Generalized Pareto Distribution* (GPD). Pada umumnya, metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter distribusi *extreme value* adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Probability Weighted Moments* (PWM). Metode PWM menghasilkan estimasi parameter yang baik ketika distribusi *extreme value* digunakan untuk periode *return* yang panjang, yaitu lebih dari 100 tahun dan memerlukan ukuran sampel kecil, sedangkan metode MLE memerlukan ukuran sampel besar. Penelitian ini dilakukan di Jakarta dengan periode Januari 1961-Desember 2003 dan metode yang digunakan adalah *Block Maxima* dengan pendekatan distribusi GEV serta estimasi parameter yang digunakan adalah MLE dan PWM. Hasil penelitian menunjukkan bahwa estimasi parameter distribusi GEV dengan MLE diperoleh persamaan yang tidak *closed form* sehingga diselesaikan melalui analisis numerik menggunakan iterasi BFGS Quasi Newton, sedangkan estimasi parameter dengan metode PWM diperoleh persamaan yang *closed form*. Selain itu tidak terjadi perubahan iklim di Stasiun Jakarta pada periode Januari 1961-Desember 2003. Hal ini ditunjukkan dengan tidak adanya perubahan distribusi pada periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003) baik untuk estimasi parameter menggunakan metode MLE maupun PWM serta setiap nilai estimasi parameter termuat dalam *confidence interval* 95%. Selain menggunakan data real, pada penelitian ini juga menggunakan data simulasi dan diperoleh kesimpulan yang sama dengan hasil estimasi pada data real.

**Kata kunci:** *Extreme Value Theory* (EVT), *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), *Probability Weighted Moments* (PWM)







# PARAMETER ESTIMATION OF THE GENERALIZED EXTREME VALUE (GEV) DISTRIBUTION (Case study: Identification of Climate Change in Jakarta)

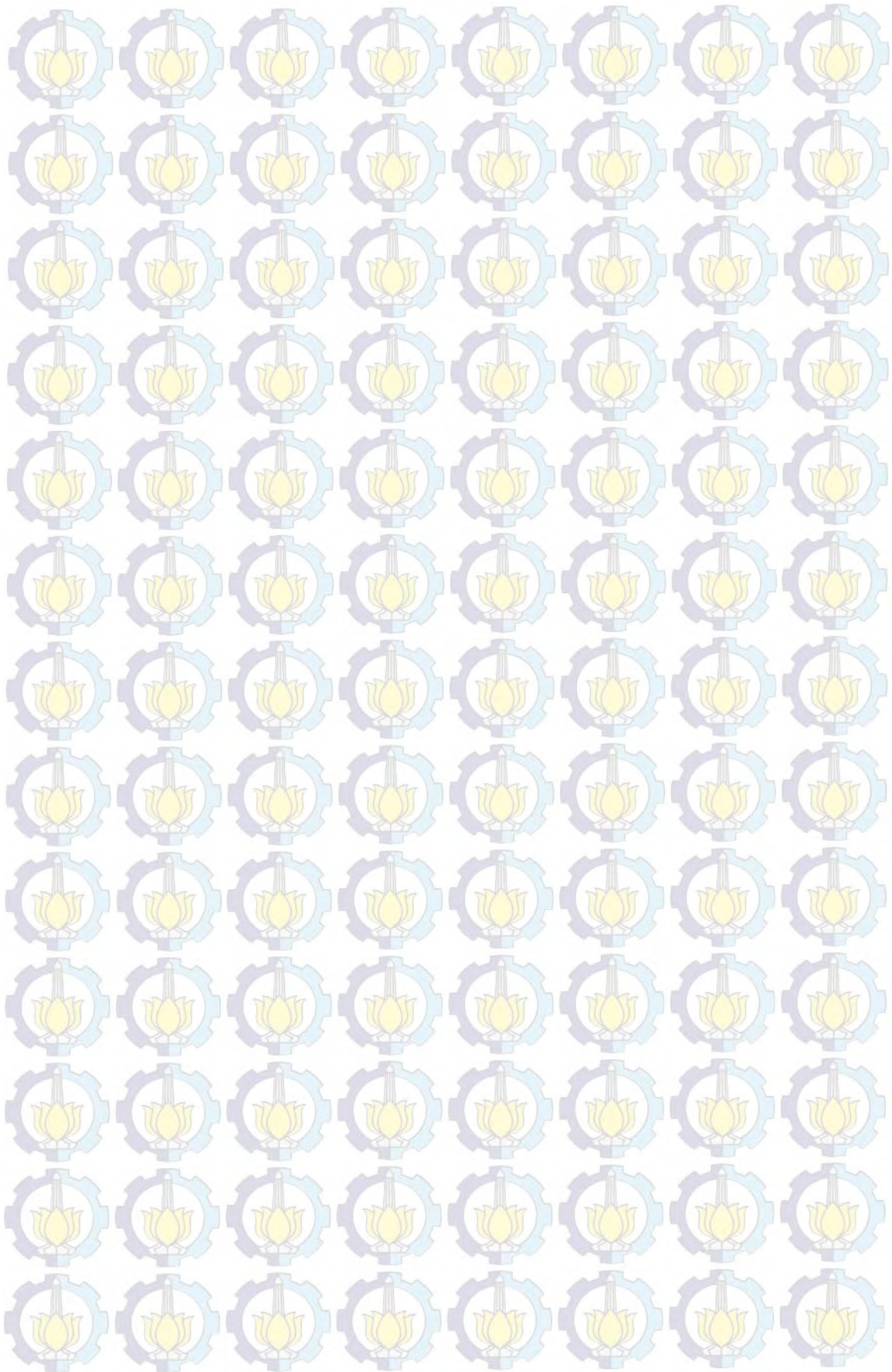
By : Anita Rahayu  
Student Identity Number : 1310 201 003  
Supervisors : Dr. Sutikno, S.Si, M.Si  
Dr. Purhadi, M.Sc

## ABSTRACT

Extreme weather and climate change are difficult to avoid and provide a high impact to the various facets of life. Many of the problems that requires knowledge about the behavior of extreme values and one of the methods used are the Extreme Value Theory (EVT). EVT used to draw up reliable systems in a variety of conditions, so as to minimize the risk of a major disaster. There are two methods for identifying extreme value, Block Maxima with Generalized Extreme Value distribution approach (GEV) and Peaks Over Threshold (POT) with Generalized Pareto Distribution (GPD). In general, the methods which are used for estimating the distribution parameters of extreme value are Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Probability Weighted Moments (PWM). PWM yields a good parameter estimation for the return period of more than 100 years and require a small sample size, but MLE is requires a large sample size. This research in Jakarta with January 1961-December 2003 period, the method used is Block Maxima with the approach of Generalized Extreme Value distribution (GEV), and parameter estimation which used are MLE and PWM. The result showed that the parameter estimation with MLE methods retrieved the equation not closed form so that should be solved through numerical analysis using the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi Newton, and parameter estimation with PWM method retrieved the equation closed form. There is not change about distribution of GEV for the period I and II with the value of the parameter estimation obtained using MLE and PWM method. In addition use real data, in this research also use simulation data and result showed that the conclusion is same with estimation in real data.

**Key words:** Extreme Value Theory (EVT), Maximum Likelihood Estimation (MLE), Probability Weighted Moments (PWM)





## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

#### 2.1 *Extreme Value Theory* (EVT)

Kejadian ekstrem yang sering terjadi dalam bidang asuransi, ekonomi, klimatologi, hidrologi, dan telekomunikasi ditunjukkan dengan adanya suatu pengamatan yang sangat tinggi (*maximum*) dan sangat rendah (*minimum*). Hal yang menarik adalah menentukan probabilitas (*maximum* dan *minimum*) dari kejadian langka (*tail distribution*). Salah satu metode statistika yang digunakan untuk mempelajari perilaku ekor (*tail*) distribusi tersebut adalah *Extreme Value Theory* (EVT). EVT berfokus pada perilaku daerah ekor (*tail*) dari suatu distribusi untuk dapat menentukan probabilitas dari nilai-nilai ekstrem (Lewis, 2004). Nilai ekstrem berasal dari suatu peristiwa yang sangat jarang terjadi, sering dinyatakan sebagai *outlier* dan diabaikan keberadaannya namun memiliki dampak yang sangat besar. Kajian mengenai ekor distribusi menunjukkan bahwa beberapa kasus data iklim (curah hujan, suhu, dan kelembaban) memiliki ekor distribusi yang gemuk (*heavy tail*), yaitu ekor distribusi turun secara lambat bila dibandingkan dengan distribusi normal.

Menurut *Central Limit Theorem* (CLT), distribusi normal adalah distribusi limit dari rata-rata sampel. Teorema Fisher-Tippet-Gnedenko analog dengan CLT dan menggunakan indeks ekor (*tail*) untuk menyatukan karakterisasi yang mungkin dari fungsi densitas distribusi *extreme value* (Lebaron dan Samantha, 2004).

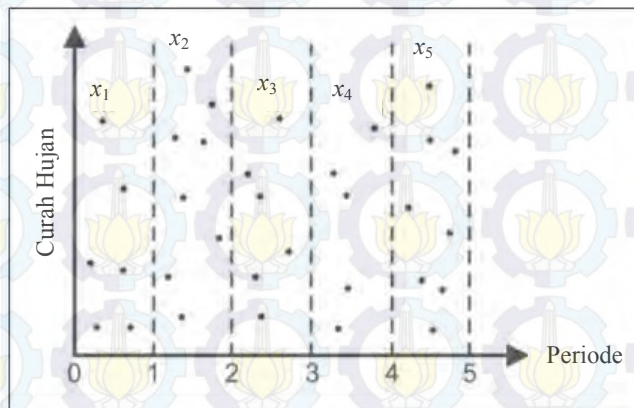
McNeil (1999) serta Gilli dan Kellezi (2003) menyebutkan bahwa terdapat dua metode dalam mengidentifikasi nilai ekstrem yaitu mengambil nilai maksimum dalam suatu periode (disebut metode *Block Maxima*) dan mengambil nilai-nilai yang melewati suatu nilai *threshold* (disebut metode *Peaks Over Threshold*).



### 2.1.1 Metode *Block Maxima*

Salah satu metode dalam mengidentifikasi nilai ekstrem adalah *Block Maxima*, yang mengidentifikasi nilai ekstrem berdasarkan nilai maksimum data pengamatan yang dikelompokkan berdasarkan periode tertentu. Pada metode ini, data pengamatan dibagi dalam blok-blok pada periode waktu tertentu, misal bulan, triwulan, semester, atau tahun. Kemudian untuk setiap blok ditentukan besarnya data pengamatan maksimum dan nilai tersebut adalah nilai ekstrem untuk setiap blok dan digunakan sebagai sampel pada metode *Block Maxima*.

Gambar 2.1 berikut menunjukkan ilustrasi pengambilan sampel dengan metode *Block Maxima*, dimana terdapat data curah hujan dari bulan (periode) pertama sampai kelima. Untuk bulan pertama (blok pertama), nilai maksimum adalah  $x_1$  sehingga data yang digunakan sebagai sampel untuk bulan pertama adalah  $x_1$ , untuk bulan kedua (blok kedua), nilai maksimum adalah  $x_2$  sehingga data yang digunakan sebagai sampel untuk bulan kedua adalah  $x_2$ , dan untuk bulan berikutnya pengambilan sampel dilakukan dengan cara yang sama seperti bulan sebelumnya.



Gambar 2.1 Ilustrasi Pengambilan Data Sampel dengan Metode *Block Maxima*

Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) adalah keluarga dari distribusi kontinu yang dibangun dalam EVT untuk mengkombinasikan distribusi Gumbel, Frechet, dan Weibull yang dikenal sebagai distribusi *extreme value* tipe I, II, dan III. Pada distribusi GEV,  $X$  merupakan variabel random yang mempunyai *Cumulative Distribution Function* (CDF) sebagai berikut.

$$F(x, \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\}, & -\infty < x < \infty, \xi \neq 0, 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & -\infty < x < \infty, \xi = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$\mu$  adalah parameter lokasi (*location*) dengan  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma$  adalah parameter skala (*scale*) dengan  $\sigma > 0$ , dan  $\xi$  adalah parameter bentuk (*shape*). *Probability Density Function* (PDF) untuk distribusi GEV adalah :

$$f(x, \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ - \frac{x - \mu}{\sigma} \right\} \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Parameter bentuk  $\xi$  menentukan perilaku ekor (*tail*) dari distribusi. Tipe distribusi GEV didefinisikan dengan  $\xi = 0$ ,  $\xi > 0$ , dan  $\xi < 0$  dan dapat disamakan dengan distribusi Gumbel, Frechet, dan Weibull yang memiliki CDF sebagai berikut.

- a. Gumbel (distribusi *extreme value* tipe I) untuk  $\xi = 0$

$$F(x; a, b) = \exp \left\{ - \exp \left( - \frac{x - a}{b} \right) \right\}, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

- b. Frechet (distribusi *extreme value* tipe II) untuk  $\xi > 0$

$$F(x, a, b, \alpha) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \exp \left\{ - \left( \frac{x - a}{b} \right)^{-\alpha} \right\}, & x > a \end{cases} \quad (2.4)$$



c. Weibull (distribusi *extreme value* tipe III) untuk  $\xi < 0$

$$F(x, a, b, \alpha) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(-\frac{x-a}{b}\right)^\alpha\right\}, & x < a \\ 1, & x \geq a \end{cases} \quad (2.5)$$

dengan  $a$  adalah parameter lokasi (*location*),  $b > 0$  adalah parameter skala (*scale*), dan  $\alpha > 0$  adalah parameter bentuk. Bentuk dari distribusi GEV akan mengarah pada distribusi Gumbel untuk  $\xi = 0$ , distribusi Frechet untuk  $\xi > 0$ , dan distribusi Weibull untuk  $\xi < 0$ . Kombinasi dari persamaan (2.3), (2.4), dan (2.5) adalah distribusi GEV setelah parameternya ditentukan sebagai berikut : untuk distribusi Frechet parameternya ditentukan menjadi  $\alpha = 1/\xi > 0$  sehingga  $\xi = 1/\alpha > 0$ ,  $\sigma = b/\alpha$ , dan  $\mu = a+b$ , sedangkan untuk distribusi Weibull parameternya ditentukan menjadi  $\alpha = -1/\xi < 0$  sehingga  $\xi = -1/\alpha < 0$ ,  $\sigma = b/\alpha > 0$  dan  $\mu = a-b$ .

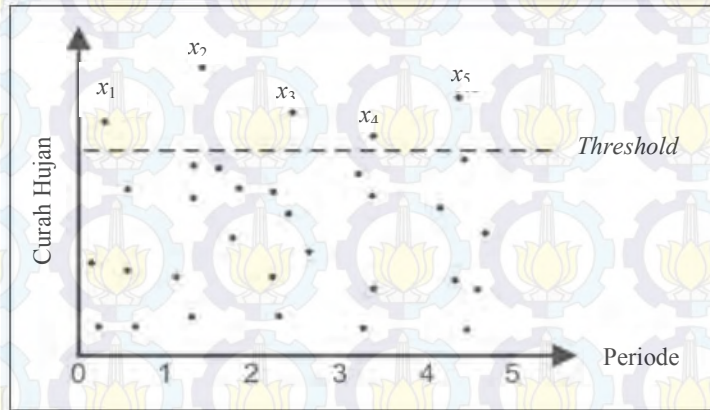
Distribusi GEV pertama kali diperkenalkan oleh Jenkinson (1955). Metode *Block Maxima* yang menggunakan pendekatan distribusi GEV mengaplikasikan teorema Fisher-Tippet-Gnedenko (1928) yang menyatakan bahwa apabila suatu seri yang terdiri dari nilai tertinggi (*maxima*) pada suatu interval waktu tertentu akan mengikuti distribusi GEV. Semakin besar nilai  $\xi$  maka distribusinya akan memiliki ekor yang semakin berat (*heavy tail*) yang menunjukkan bahwa peluang terjadinya nilai ekstrem akan semakin besar. Menurut Finkenstadt dan Rootzen (2004), untuk kasus dengan  $\xi = 0$  dikatakan bahwa kasus memiliki "*medium tailed*",  $\xi > 0$  dikatakan bahwa kasus memiliki "*long tailed*", dan  $\xi < 0$  dikatakan bahwa kasus memiliki "*short tailed*". Dengan demikian, dari distribusi Gumbel, Frechet, dan Weibull yang memiliki *heavy tail* adalah distribusi Frechet.



### 2.1.2 Metode *Peaks Over Threshold*

Pada dasarnya metode *Peaks Over Threshold* (POT) berbeda dengan metode *Block Maxima*, dengan metode ini data pengamatan tidak dibagi dalam blok-blok periode tertentu seperti halnya metode *Block Maxima*, akan tetapi pada metode POT menentukan data sampel menggunakan besaran yang disebut *threshold* ( $u$ ). Semua data pengamatan yang berada di atas nilai *threshold* ( $u$ ) diidentifikasi sebagai nilai ekstrem.

Distribusi *Generalized Pareto Distribution* (GPD) yang digunakan pada metode POT pertama kali dikemukakan oleh Pickands (1975) selanjutnya dipelajari oleh Davison (1984). Berdasarkan Gambar 2.2 terlihat bahwa pengamatan yang berada di atas nilai *threshold* ( $u$ ) adalah pengamatan  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , dan  $x_5$  sehingga kelima  $x$  tersebut menjadi sampel data curah hujan yang akan digunakan untuk analisis selanjutnya dan disebut sebagai nilai ekstrem.



Gambar 2.2 Ilustrasi Pengambilan Data Sampel dengan Metode *Peaks Over Threshold*

Teorema Picklands-Dalkema dan de Haan menyatakan bahwa apabila semakin tinggi nilai *threshold* ( $u$ ) maka distribusinya akan mengikuti GPD dengan CDF sebagai berikut.

$$F(x, \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 1 - \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi}}, & x > 0, \xi \neq 0 \\ 0, & x \leq 0, \xi \neq 0 \end{cases} \quad (2.6)$$



$$F(x, \mu, \sigma) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\frac{x - \mu}{\sigma}\right\} & , x > 0, \xi = 0 \\ 0 & , x \leq 0, \xi = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Adapun *Probability Distribution Function* (PDF) untuk distribusi GPD adalah :

$$f(x, \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\xi} - 1} \right\} & , x > 0, \xi \neq 0 \\ 0 & , x \leq 0, \xi \neq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x - \mu}{\sigma}\right\} & , x > 0, \xi = 0 \\ 0 & , x \leq 0, \xi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

## 2.2 Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value*

Estimasi parameter distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain :

### 1. *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

*Maximum Likelihood Estimation* (MLE) merupakan salah satu metode estimasi yang memaksimumkan fungsi *likelihood* untuk mendapatkan estimasi parameternya. Fleksibilitas dalam menentukan fungsi *likelihood* memberikan kemudahan dalam mengestimasi parameter dengan MLE. Tahapan estimasi parameter menggunakan MLE antara lain :

a. Mengambil  $n$  sampel random  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$x_i \sim f(x_i, \theta), i = 1, 2, \dots, n$$

b. Membuat fungsi *likelihood*

Fungsi *likelihood* adalah fungsi peluang bersama dari  $x_1, x_2, \dots, x_n$



$$L(\boldsymbol{\theta}|x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \boldsymbol{\theta}) \quad (2.10)$$

c. Memaksimumkan fungsi *likelihood*

Cara yang digunakan untuk memaksimumkan fungsi *likelihood* adalah dengan membuat ln dari fungsi *likelihood*

Syarat perlu  $\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = 0$  sehingga diperoleh  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

Syarat cukup  $\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T} = H(\boldsymbol{\theta})$  disebut matriks Hessian

$\hat{\boldsymbol{\theta}}$  memaksimumkan  $L(\boldsymbol{\theta})$  dengan syarat  $H(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  definit positif

Apabila hasil persamaan yang diperoleh dari turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap masing-masing parameter adalah *closed form*, maka diperoleh estimasi terhadap masing-masing parameter. Akan tetapi apabila hasilnya tidak *closed form* maka diperlukan analisis numerik untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Salah satu analisis numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan yang tidak *closed form* adalah metode Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi Newton.

Metode BFGS Quasi Newton merupakan perbaikan dari metode Newton. Metode Newton bergerak berdasarkan informasi derivatif dan berasal dari analisis deret Taylor (Luo, Zhong, Tang, Zhou, 2007). Rumus umum untuk metode Newton adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1} g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (2.11)$$

dengan :

$\boldsymbol{\theta}^{(k)}$  = nilai awal

$H(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^{-1}$  = invers dari matriks Hessian

$g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  = matriks yang elemen-elemennya berisi turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap masing-masing parameter

Dari persamaan (2.11) dapat dibentuk sebuah metode modifikasi Newton klasik dengan rumus sebagai berikut.



$$\boldsymbol{\varrho}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varrho}^{(k)} - \alpha H(\boldsymbol{\varrho}^{(x_0)})^{-1} g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) \quad (2.12)$$

Pada metode BFGS Quasi Newton, Matriks Hessian  $H(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})$  diganti dengan matriks Hessian yang *diupdate* yang merupakan matriks definit positif dan mempunyai sifat seperti matriks Hessian  $H(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})$ . Rumus umum untuk metode ini adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\varrho}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varrho}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)} \quad (2.13)$$

dengan  $\alpha^{(k)}$  adalah fungsi yang dapat meminimumkan *error* yang akan terjadi dimana  $\alpha^{(k)} = \arg \min_{\alpha} \left[ f(\boldsymbol{\varrho}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)}) \right]$  dan  $S^{(k)}$  didefinisikan sebagai berikut.

$$S^{(k)} = -\left(H^{(k)}\right) g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) \quad (2.14)$$

Kemudian menghitung  $\Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)} = \alpha^{(k)} S^{(k)}$  dan  $\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) = g(\boldsymbol{\varrho}^{(k+1)}) - g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})$  sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \left( 1 + \frac{\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})^T H^{(k)} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})}{\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})^T \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)}} \right) \frac{\Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T}}{\Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})} - \frac{H^{(k)} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T} + \left( H^{(k)} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T} \right)^T}{\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})^T \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)}} \quad (2.15)$$

Iterasi tersebut dilakukan sampai kondisi  $\|\boldsymbol{\varrho}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varrho}^{(k)}\| \leq e$  dengan  $e$  adalah bilangan kecil sekali. Apabila iterasi berhenti akan diperoleh nilai estimasi untuk setiap parameter.

### 3. Probability Weighted Moments (PWM)

Metode *Probability Weighted Moments* (PWM) merupakan modifikasi dari metode “konvensional” momen dan pertama kali dikemukakan oleh Hosking *et al.*, (1984). Fungsi PWM dari variabel random  $X$  dengan *Cumulative Distribution Function*  $F(X)$  adalah :



$$M_{p,r,s} = E \left[ X^p (F(X))^r (1 - F(X))^s \right] \text{ dimana } p, r, \text{ dan } s \text{ bilangan real} \quad (2.16)$$

*Subclass* dari persamaan (2.16) adalah  $M_{1,r,s}$  ( $p = 1, r = 0, 1, 2, \dots, s = 0, 1, 2, \dots$ ).  $M_{1,r,s}$  dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu  $s = 0$  ( $M_{1,r,0}$ ) dan  $r = 0$  ( $M_{1,0,s}$ ) dan fungsi PWM dari  $M_{1,r,0}$  dan  $M_{1,0,s}$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$M_{1,r,0} = E \left[ X (F(X))^r \right] \text{ dengan } r = 0, 1, 2, \dots$$

$$M_{1,0,s} = E \left[ X (1 - F(X))^s \right] \text{ dengan } s = 0, 1, 2, \dots$$

Pada umumnya fungsi PWM yang digunakan untuk mengestimasi parameter distribusi GEV adalah  $\beta_r = M_{1,r,0} = E \left[ X (F(X))^r \right]$  dan fungsi tersebut digunakan untuk analisis selanjutnya.

$$\begin{aligned} \beta_r = M_{1,r,0} &= E \left[ X (F(X))^r \right] \\ &= \frac{1}{r+1} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (r+1)^{-\xi} \Gamma(1+\xi) \right) \right\}, \quad \xi < 1, \xi \neq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

PWM dari  $\beta_r$  dapat diestimasi dengan estimator *unbiased* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_r = \hat{M}_{1,r,0} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \prod_{\ell=1}^r \frac{j-\ell}{n-\ell} \right) x_{[j]} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_{[j]} \end{aligned} \quad (2.18)$$

dimana  $x_{[j]}$  menunjukkan tingkat pengamatan dengan  $x_{[1]}$  adalah pengamatan terkecil dan  $x_{[n]}$  adalah pengamatan terbesar,  $n$  adalah jumlah pengamatan, dan nilai  $r > 0$ .

### 2.3 *Confidence Interval 95% untuk Estimasi Parameter yang Diperoleh dengan Metode Maximum Likelihood Estimation*

*Confidence interval 95%* untuk estimasi parameter lokasi, skala, dan estimasi parameter bentuk dilakukan dengan menggunakan pendekatan normal sebagai berikut.

$$(\hat{\mu} - Z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\mu}) \leq \mu \leq \hat{\mu} + Z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\mu})) \quad (2.19)$$



$$(\hat{\sigma} - Z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\sigma}) \leq \sigma \leq \hat{\sigma} + Z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\sigma})) \quad (2.20)$$

$$(\hat{\xi} - Z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\xi}) \leq \xi \leq \hat{\xi} + Z_{\alpha/2} \cdot SE(\hat{\xi})) \quad (2.21)$$

dengan  $SE$  adalah *standart error* untuk masing-masing estimasi parameter

## 2.4 Pengujian Hipotesis

Pengujian hipotesis dilakukan untuk setiap parameter yang diperoleh. Pada penelitian ini pengujian hipotesis dilakukan untuk parameter lokasi, skala, dan parameter bentuk dengan menggunakan pendekatan normal.

- Pengujian hipotesis untuk parameter  $\mu$

$$\text{Hipotesis} : H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{Statistik uji} : Z_{hitung} = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{SE(\hat{\mu})} \quad (2.22)$$

Keputusan tolak  $H_0$  apabila nilai  $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$

- Pengujian hipotesis untuk parameter  $\sigma$

$$\text{Hipotesis} : H_0 : \sigma = \sigma_0$$

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0$$

$$\text{Statistik uji} : Z_{hitung} = \frac{\hat{\sigma} - \sigma_0}{SE(\hat{\sigma})} \quad (2.23)$$

Keputusan tolak  $H_0$  apabila nilai  $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$

- Pengujian hipotesis untuk parameter  $\xi$

$$\text{Hipotesis} : H_0 : \xi = \xi_0$$

$$H_1 : \xi \neq \xi_0$$

$$\text{Statistik uji} : Z_{hitung} = \frac{\hat{\xi} - \xi_0}{SE(\hat{\xi})} \quad (2.24)$$

Keputusan tolak  $H_0$  apabila nilai  $|Z_{hitung}| > Z_{\alpha/2}$



## 2.5 Uji Kesesuaian Distribusi

Uji kesesuaian distribusi bertujuan untuk mengidentifikasi apakah distribusi (pola) sebaran suatu data sesuai dengan pola sebaran teoritis. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menguji kesesuaian atau *goodness of fit* fungsi distribusi probabilitas teoritis terhadap fungsi probabilitas empiris adalah uji Kolmogorov Smirnov.

Uji Kolmogorov Smirnov adalah suatu uji *goodness of fit* dengan memperhatikan tingkat kesesuaian antara distribusi serangkaian nilai sampel dengan suatu distribusi teoritis tertentu. Uji ini menetapkan suatu titik dengan kedua distribusi memiliki perbedaan terbesar. Misal  $X$  adalah variabel random yang berasal dari populasi yang mengikuti suatu distribusi teoritis tertentu, dalam hal ini distribusi GEV.  $F_0(x)$  adalah fungsi distribusi frekuensi kumulatif teoritis dan  $S_n(x)$  adalah distribusi frekuensi kumulatif yang diamati dari suatu sampel acak dengan  $n$  observasi. Hipotesis yang digunakan pada uji Kolmogorov Smirnov adalah :

$H_0$  :  $X$  berasal dari populasi yang mengikuti suatu distribusi teoritis tertentu  
atau  $S_n(x) = F_0(x)$

$H_1$  :  $X$  tidak berasal dari populasi yang mengikuti suatu distribusi teoritis tertentu  
atau  $S_n(x) \neq F_0(x)$

Statistik Uji :  $D_{hitung} = \max |S_n(x) - F_0(x)|$  (2.25)

Keputusan tolak  $H_0$  jika nilai  $D_{hitung} > D_\alpha$ .  $D_\alpha$  adalah nilai tabel Kolmogorov Smirnov yang disajikan pada Lampiran 6.

## 2.6 Return Level

Menurut Gilli dan Kellezi (2003) dalam Prang (2006), *return level* adalah nilai maksimum yang diharapkan akan dilampaui satu kali dalam jangka waktu  $k$  dengan periode  $p$  atau dengan kata lain, dalam  $k$  jangka waktu dan  $p$  periode, curah hujan akan mencapai nilai maksimum  $R_p^k$  satu kali. Rumus untuk estimasi *return level* adalah :



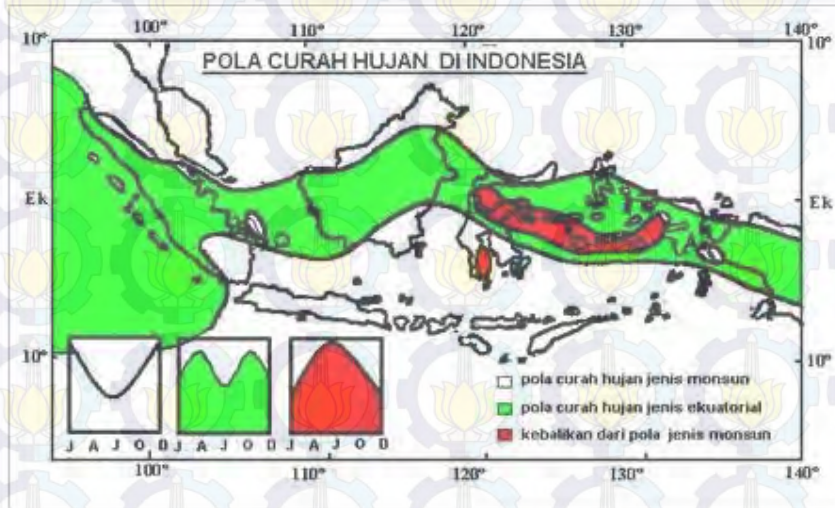
$$\hat{R}_p^k = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left\{ 1 - \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right)^{-\hat{\xi}} \right\}, \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln \left\{ \left( -\ln \left( 1 - \frac{1}{k} \right) \right) \right\}, \hat{\xi} = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

## 2.7 Curah Hujan

Curah hujan (mm) adalah ketinggian air hujan yang terkumpul dalam tempat yang datar, tidak menguap, tidak meresap, dan tidak mengalir. Curah hujan 1 milimeter artinya dalam luasan satu meter persegi pada tempat yang datar tertampung air setinggi satu millimeter atau tertampung air sebanyak satu liter. Curah hujan dapat diukur dalam harian, bulanan, atau tahunan. Pada umumnya wilayah Indonesia dibagi menjadi 3 (tiga) pola hujan, yaitu :

1. Pola hujan monsun, yang wilayahnya memiliki perbedaan yang jelas antara periode musim hujan dan periode musim kemarau kemudian dikelompokkan dalam Zona Musim (ZOM), tipe curah hujan yang bersifat unimodal (satu puncak musim hujan, Desember-Januari-Februari (DJF) merupakan periode musim hujan, Maret-April-Mei (MAM) merupakan periode transisi dari musim hujan menuju musim kemarau, Juni-Juli-Agustus (JJA) merupakan periode musim kemarau, dan September-Oktober-November (SON) merupakan periode transisi dari musim kemarau menuju musim hujan
2. Pola hujan ekuatorial, yang wilayahnya memiliki distribusi hujan bulanan bimodal dengan dua puncak musim hujan maksimum dan hampir sepanjang tahun masuk dalam kriteria musim hujan. Pola ekuatorial dicirikan oleh tipe curah hujan dengan bentuk bimodal (dua puncak hujan) yang biasanya terjadi sekitar bulan Maret dan Oktober
3. Pola hujan lokal, yang wilayahnya memiliki distribusi hujan bulanan yang berlawanan dengan pola monsun. Pola lokal dicirikan oleh bentuk pola hujan unimodal (satu puncak hujan), tetapi bentuknya berlawanan dengan tipe hujan monsun





Gambar 2.3 Pola Curah Hujan di Indonesia

Curah hujan dapat diukur dengan alat pengukur curah hujan otomatis atau manual. Alat pengukur curah hujan merupakan alat untuk mengukur curah hujan yang terjadi pada suatu daerah baik pedesaan, kecamatan, ataupun propinsi yang mengacu pada standar WMO (*World Metrological Organization*). Dengan adanya alat pengukur curah hujan ini dapat diketahui banyaknya curah hujan yang terjadi setiap waktu. Data curah hujan yang dihasilkan secara otomatis dari alat pengukur curah hujan ini dapat dikirimkan secara *online* melalui internet dengan sistem operasi *Indonesia Go Open Source* (IGOS) dan disimpan dalam suatu database yang dapat diakses oleh siapa saja melalui internet. Alat-alat pengukur tersebut harus diletakkan pada daerah yang masih alamiah, sehingga curah hujan yang terukur dapat mewakili wilayah yang luas. Salah satu tipe pengukur hujan manual yang paling banyak digunakan adalah tipe *observatorium* (*obs*) atau sering disebut *ombrometer*. Data yang diperoleh dari alat ini adalah curah hujan harian. Curah hujan dari pengukuran alat ini dihitung dari volume air hujan dibagi dengan luas mulut penakar. Alat tipe *observatorium* ini merupakan alat baku dengan mulut penakar seluas  $100 \text{ cm}^2$  dan dipasang dengan ketinggian mulut penakar 1,2 m dari permukaan tanah. Alat pengukur hujan otomatis biasanya memakai prinsip pelampung, timbangan, dan jungkitan (Handoko, 1993). Berikut adalah keunggulan alat pengukur curah hujan otomatis.



1. Memudahkan BMKG dalam mengamati curah hujan pada suatu daerah
2. Mengukur curah hujan secara otomatis
3. Database curah hujan di setiap daerah dapat diakses secara *online* setiap saat sehingga dapat memprediksi terjadinya banjir di suatu daerah
4. Memberikan data hidrologi untuk kepentingan departemen-departemen yang terkait
5. *Software* aplikasi dapat dikembangkan menjadi sistem informasi *monitoring* banjir, kelembaban udara, dan temperatur
6. Pencatatan waktu dalam data curah hujan menggunakan waktu yang tertelusur ke *time server* <http://ntp.kim.lipi.go.id>

Indonesia memiliki wilayah yang strategis yaitu antara Benua Asia dan Afrika serta antara Samudera Pasifik dan Hindia. Selain itu Indonesia memiliki iklim tropis yang dilewati oleh garis khatulistiwa dan termasuk ke dalam pengaruh kawasan laut pasifik sehingga menerima energi matahari yang lebih luas sepanjang tahun. Hal tersebut menyebabkan Indonesia sangat rentan dengan terjadinya iklim ekstrem dan gangguan cuaca. Beberapa gangguan atau kejadian ekstrem tertentu seperti El-Nino, La-Nina, Dipole Mode, dan Madden Julian Oscillation. El-Nino terkait dengan kejadian kekeringan sedangkan La-Nina terkait dengan banjir. Dipole mode atau sering disebut Dipole Mode Index (DMI) merupakan fenomena yang mirip dengan ENSO tetapi terjadi di Samudera Hindia. Peristiwa Dipole Mode ditandai adanya perbedaan anomali Suhu Permukaan Laut (SPL) antara Samudera Hindia tropis bagian barat dengan Samudera Hindia tropis bagian timur. Jika nilai DMI negatif, berarti wilayah barat Indonesia curah hujannya meningkat. Jika nilai DMI positif, maka wilayah barat Indonesia curah hujannya berkurang.

## **2.8 Perubahan Iklim**

Iklim adalah kondisi rata-rata cuaca dalam waktu yang panjang. Iklim di bumi sangat dipengaruhi oleh posisi matahari terhadap bumi. Terdapat beberapa klasifikasi iklim di bumi ini yang ditentukan oleh letak geografis. Secara umum dapat disebut sebagai iklim tropis, lintang menengah, dan lintang tinggi.



Faktor-faktor alam seperti fenomena bertambahnya aerosol akibat letusan gunung berapi, siklus yang dapat terjadi di dalam suatu tahun (*inter annual*), El-Nino dan La-Nina yang bisa terjadi di dalam sepuluh tahun (*inter decadal*) tidak masuk dalam kriteria perubahan iklim global. Pada dasarnya perubahan iklim disebabkan oleh aktivitas manusia, khususnya yang berkaitan dengan penggunaan bahan fosil dan alih guna lahan. Aktivitas manusia secara langsung maupun tidak langsung dapat menyebabkan perubahan serius pada komposisi atmosfer secara global. Hal ini disebabkan beberapa aktifitas manusia yang dapat menyebabkan meningkatnya konsentrasi gas rumah kaca secara signifikan di atmosfer. Dengan naiknya temperatur rata-rata bumi atau biasa disebut pemanasan global dapat menyebabkan perubahan variabel iklim, suhu udara, dan curah hujan.

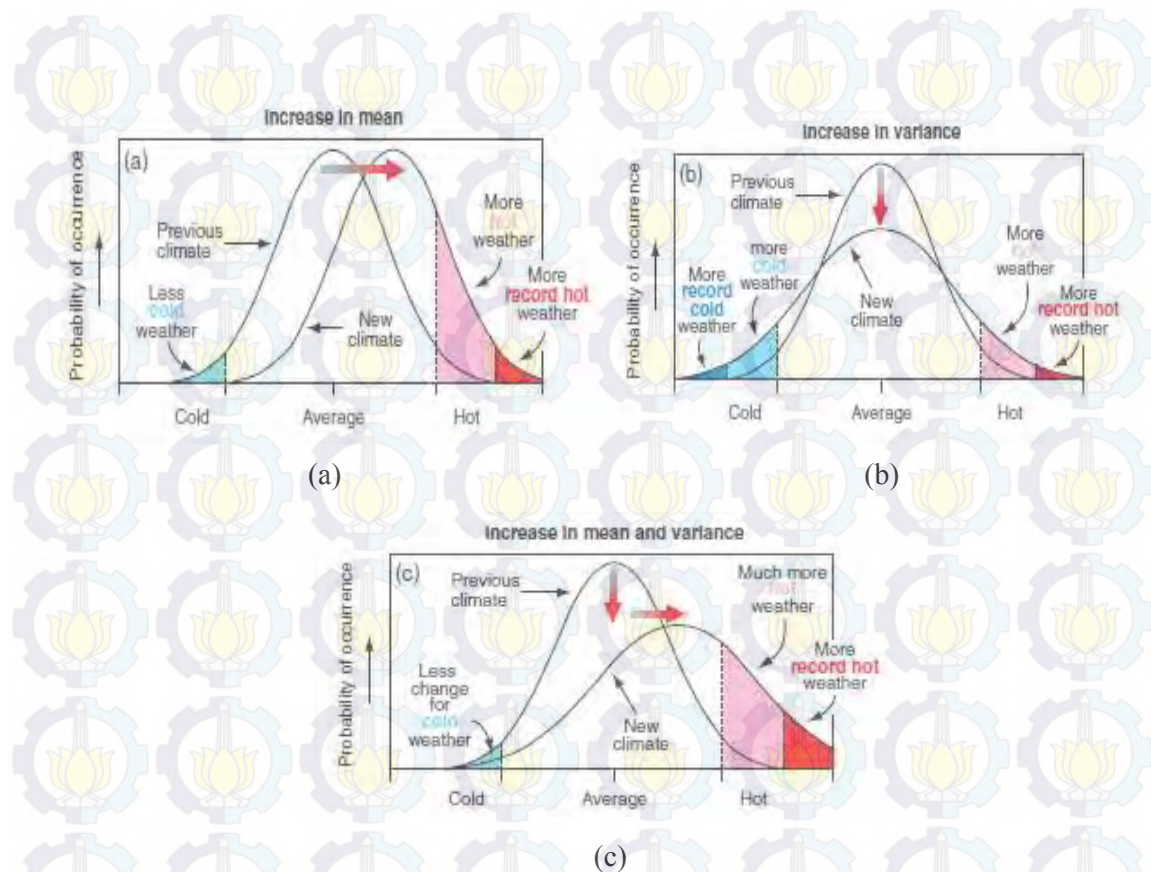
Adapun dampak dari perubahan iklim adalah mencairnya es di kutub, meningkatnya permukaan air laut, hilangnya berbagai jenis keanekaragaman hayati, meningkatnya curah hujan, ketahanan pangan terancam, risiko kesehatan, ketersediaan air berkurang, serta berdampak pada ekonomi dan sosial budaya.

Pada perubahan iklim tidak ada satu pun solusi tunggal yang dapat mengatasinya. Ketika *supply* dan *demand* energi ini terpenuhi, maka akan menentukan terkendalinya perubahan iklim atau tidak. Keutamaan dari mitigasi perubahan iklim akan dirasakan lebih dari 2 hingga 3 dekade mendatang. Mitigasi ini sangat menentukan dan berpengaruh secara luas terhadap peningkatan suhu rata-rata global dan dampak dari terjadinya perubahan iklim dapat dihindari.

Indonesia beresiko mengalami kerugian yang signifikan karena perubahan iklim. Karena keberadaannya sebagai negara kepulauan, Indonesia sangat rentan terhadap dampak perubahan iklim. Kekeringan yang semakin panjang, frekuensi peristiwa cuaca ekstrem yang semakin sering, dan curah hujan tinggi yang menyebabkan bahaya banjir besar, semuanya merupakan contoh dari dampak perubahan iklim.

Menurut *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC) 2001 terdapat tiga kriteria untuk identifikasi perubahan iklim yang disajikan pada Gambar 2.4.





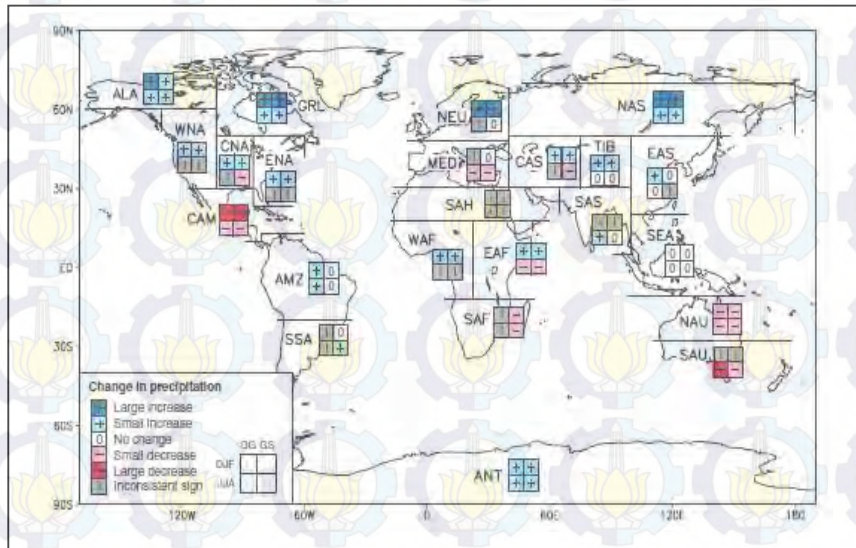
Gambar 2.4 Identifikasi Perubahan Iklim dengan  
 (a) Peningkatan Rata-Rata, (b) Peningkatan Varians  
 (c) Peningkatan Rata-Rata dan Varians

Berdasarkan Gambar 2.4 menunjukkan bahwa iklim dikatakan mengalami perubahan apabila terjadi peningkatan nilai rata-rata, peningkatan nilai varians, atau peningkatan rata-rata dan varians (atau disebut perubahan distribusi). Apabila suatu studi tidak teridentifikasi memiliki tiga kriteria seperti yang dijelaskan pada Gambar 2.4 maka dikatakan tidak terjadi perubahan iklim.

Penentuan periode untuk identifikasi perubahan iklim sepanjang 30 tahun didasarkan pada *Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) 2001* yang menyatakan bahwa pada periode 30 tahun terjadi peningkatan *greenhouse gas plus sulphates (GS)* dari  $0,8^{\circ}\text{C}$  hingga  $1,7^{\circ}\text{C}$ , terjadi peningkatan *greenhouse gas (G)* dari  $1,0^{\circ}\text{C}$  hingga  $2,1^{\circ}\text{C}$ , dan terjadi peningkatan  $\text{CO}_2$  sebesar 1% per tahun.

Gambar 2.5 menunjukkan bahwa di Indonesia (*South East Asia* atau SEA) ditandai dengan nol (0), artinya bahwa di Indonesia tidak terjadi perubahan iklim.





Sumber : Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) 2001

Gambar 2.5 Identifikasi Perubahan Iklim di Seluruh Dunia

## 2.9 Penelitian Terdahulu

Beberapa penelitian yang telah menggunakan *Extreme Value Theory* (EVT) dalam kajian curah hujan antara lain: Balakrishnan N., Gupta S.S., dan Panchapakesan S. (1991) yang mengestimasi parameter lokasi dan skala dari distribusi *extreme value* tipe 2 berdasarkan sampel tersensor; Sadik (1999) yang mengidentifikasi curah hujan ekstrem di Jawa Barat dengan menggunakan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV); Li *et al.*, (2004) yang mengidentifikasi curah hujan ekstrem di Australia dengan menggunakan distribusi *Generalized Pareto Distribution* (GPD); Gilleland dan Katz (2006) yang mengidentifikasi temperatur ekstrem dan menentukan nilai estimasi *return level* di United States dengan menggunakan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV); Prang (2006) yang mengidentifikasi curah hujan ekstrem di Bogor dan menghitung nilai estimasi *return level* dimana estimasi parameter menggunakan metode *Maximum Likelihood* (ML) dan *Least Square* (LS) sehingga diperoleh kesimpulan bahwa metode estimasi parameter dengan ML lebih baik apabila dibandingkan dengan LS; Seckin N., Yurtal R., Haktanir T., dan Dogan A. (2010) yang melakukan penelitian dengan menggunakan data curah hujan di sungai Ceyhan, Basin dengan



estimasi parameter menggunakan metode *Probability Weighted Moments* (PWM) dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), sehingga diperoleh hasil bahwa metode PWM lebih baik dibandingkan dengan metode MLE apabila digunakan untuk periode *return* yang panjang yaitu lebih dari 100 tahun; Tzavelas G., Paliatsos A.G., dan Nastos P.T. (2010) yang menggunakan data curah hujan pada *National Observatory of Athens* untuk 115 tahun (1891-2005), metode yang digunakan adalah *Generalized Pareto Distribution* (GPD) dan diperoleh nilai *threshold* ( $u$ ) sebesar 15,8 mm (10% *upper limit*); dan Irfan *et al.*, (2011) yang mengidentifikasi kejadian ekstrem di Jakarta dengan menggunakan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) dan *Generalized Pareto Distribution* (GPD).

Kajian-kajian berkaitan iklim ekstrem di negara lintang rendah (seperti Indonesia) masih terbatas. Oleh karena itu, penelitian berkaitan iklim ekstrem untuk identifikasi perubahan iklim di Indonesia (khususnya di Jakarta), perlu dilakukan. Selanjutnya, hasil kajian ini dapat digunakan dalam menentukan strategi adaptasi dan mitigasi perubahan iklim.

## BAB 3

### METODE PENELITIAN

#### 3.1 Data dan Sumber Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta pada periode Januari 1961 sampai Desember 2003. Data tersebut diperoleh dari Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) yang selengkapnya disajikan pada Lampiran 1. Selain itu pada penelitian ini juga menggunakan data hasil simulasi yang selengkapnya disajikan pada Lampiran 10, 11, dan 12.

#### 3.2 Metode Analisis Data

Langkah-langkah metode penelitian yang digunakan adalah:

- (1) Mengkaji estimasi parameter distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) dengan langkah-langkah sebagai berikut.

##### A. *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

- a. Mengambil  $n$  sampel random  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- b. Memformulasikan fungsi *Probability Distribution Function* (PDF) untuk distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV)
- c. Membuat fungsi *likelihood* dari PDF distribusi GEV
- d. Memaksimumkan fungsi *likelihood* dengan cara membuat ln dari fungsi *likelihood*
- e. Membuat turunan pertama dari fungsi ln *likelihood* terhadap masing-masing parameter, kemudian disamakan dengan nol

Apabila hasil yang diperoleh dari turunan pertama fungsi ln *likelihood* terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi tidak *closed form*, maka diperlukan analisis numerik untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Pada penelitian ini analisis numerik yang digunakan adalah Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi Newton dengan langkah-langkah sebagai berikut.



- Membuat turunan kedua dari fungsi  $\ln \text{likelihood}$  terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi
- Membuat turunan kedua dari fungsi  $\ln \text{likelihood}$  terhadap kombinasi masing-masing parameter yang akan diestimasi
- Membuat matriks  $g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  dimana elemen-elemennya berisi turunan pertama dari fungsi  $\ln \text{likelihood}$  terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi

$$g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

- Membuat matriks Hessian  $H^{(k)}$  dimana diagonal utamanya berisi turunan kedua dari fungsi  $\ln \text{likelihood}$  terhadap masing-masing parameter dan diagonal lain berisi turunan kedua dari fungsi  $\ln \text{likelihood}$  terhadap kombinasi masing-masing parameter dan bersifat simetris

$$H^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu \partial \xi} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma \partial \xi} & \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}$$

- Melakukan iterasi BFGS Quasi Newton dengan persamaan sebagai berikut

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)}$$

dengan nilai  $\alpha^{(k)}$  adalah fungsi yang dapat meminimumkan *error* yang akan terjadi dimana  $\alpha^{(k)} = \arg \min_{\alpha} \left[ f(\boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)}) \right]$  dan  $S^{(k)}$  didefinisikan

$$\text{dengan } S^{(k)} = -\left(H^{(k)}\right)g\left(\boldsymbol{\theta}^{(k)}\right)$$

- Menghitung perubahan  $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)} = \alpha^{(k)} S^{(k)}$  dan perubahan  $\Delta g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = g(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}) - g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \left( 1 + \frac{\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})^T H^{(k)} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})}{\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})^T \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)}} \right) \frac{\Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T}}{\Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})} - \frac{H^{(k)} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T} + \left( H^{(k)} \Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)}) \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)T} \right)^T}{\Delta g(\boldsymbol{\varrho}^{(k)})^T \Delta \boldsymbol{\varrho}^{(k)}}$$

Iterasi tersebut dilakukan sampai kondisi  $\|\boldsymbol{\varrho}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varrho}^{(k)}\| \leq e$  dengan  $e$  adalah bilangan kecil sekali. Apabila iterasi berhenti akan diperoleh nilai estimasi untuk setiap parameter.

#### B. *Probability Weighted Moments (PWM)*

Berikut adalah langkah-langkah estimasi parameter dengan metode *Probability Weighted Moments (PWM)*.

- Memformulasikan fungsi PWM ( $\beta_r$ ) dengan  $r = 0, 1, 2$
  - Memformulasikan estimator *unbiased* untuk fungsi PWM ( $\hat{\beta}_r$ ) dengan  $r = 0, 1, 2$
  - Menghitung  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  dari fungsi PWM ( $\beta_r$ )
  - Hasil persamaan yang diperoleh dari  $\hat{\beta}_0$  digunakan untuk memperoleh estimasi parameter lokasi ( $\hat{\mu}$ )
  - Menghitung  $2\beta_1 - \beta_0$  dan  $3\beta_2 - \beta_0$  dari fungsi PWM sehingga diperoleh  $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$  dan  $3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0$
  - Hasil persamaan yang diperoleh dari  $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$  digunakan untuk memperoleh estimasi parameter skala ( $\hat{\sigma}$ )
  - Membuat perbandingan  $3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0$  dan  $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$
- Hasil persamaan yang diperoleh dari perbandingan  $3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0$  dan  $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$  digunakan untuk memperoleh estimasi parameter bentuk ( $\hat{\xi}$ )



2. Menerapkan *Extreme Value Theory* (EVT) dalam mengidentifikasi perubahan iklim di Jakarta dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- a. Membuat deskripsi data curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003
- b. Melakukan identifikasi adanya ekor distribusi yang gemuk
- c. Memisahkan data menjadi dua periode, yaitu periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003)
- d. Melakukan identifikasi nilai ekstrem menggunakan metode *Block Maxima*, yaitu menyusun data curah hujan dasarian berdasarkan blok 3 bulanan untuk setiap periode, antara lain Desember-Januari-Februari (DJF), Maret-April-Mei (MAM), Juni-Juli-Agustus (JJA), dan September-Oktober-Nopember (SON)
- e. Membuat plot *Autocorrelation Function* (ACF) untuk mengetahui kerandoman data terpenuhi atau tidak. Apabila data bersifat tidak random, maka data curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 tetap digunakan pada penelitian ini. Akan tetapi pada penelitian ini juga menggunakan data simulasi dengan tiga kriteria, antara lain :
  - a. Periode I bersifat random dan periode II bersifat random  
(Data selengkapnya disajikan pada Lampiran 10)
  - b. Periode I bersifat tidak random dan periode II bersifat random  
Data ekstrem simulasi periode I berasal dari data ekstrem simulasi periode I pada poin a, akan tetapi diurutkan dari terkecil hingga terbesar. Data ekstrem simulasi periode II sama dengan data ekstrem simulasi periode II pada poin a  
(Data selengkapnya disajikan pada Lampiran 11)
  - c. Periode I bersifat tidak random dan periode II bersifat tidak random  
Data ekstrem simulasi periode I berasal dari data ekstrem simulasi periode I pada poin a, akan tetapi diurutkan dari terkecil hingga terbesar. Data ekstrem simulasi periode II berasal dari data ekstrem simulasi periode II pada poin a, akan tetapi diurutkan dari terbesar hingga terkecil

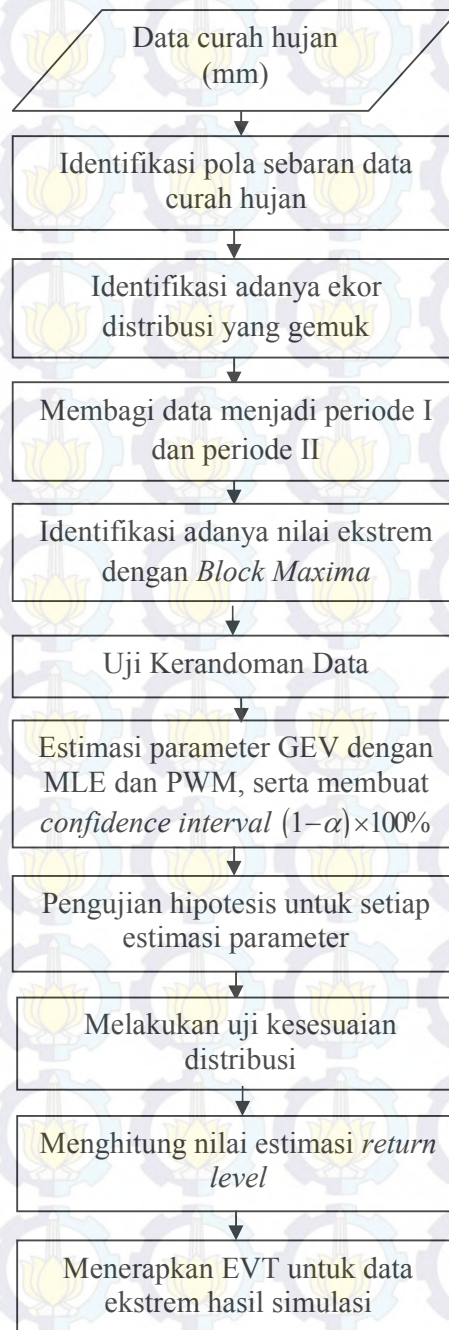


(Data selengkapnya disajikan pada Lampiran 12)

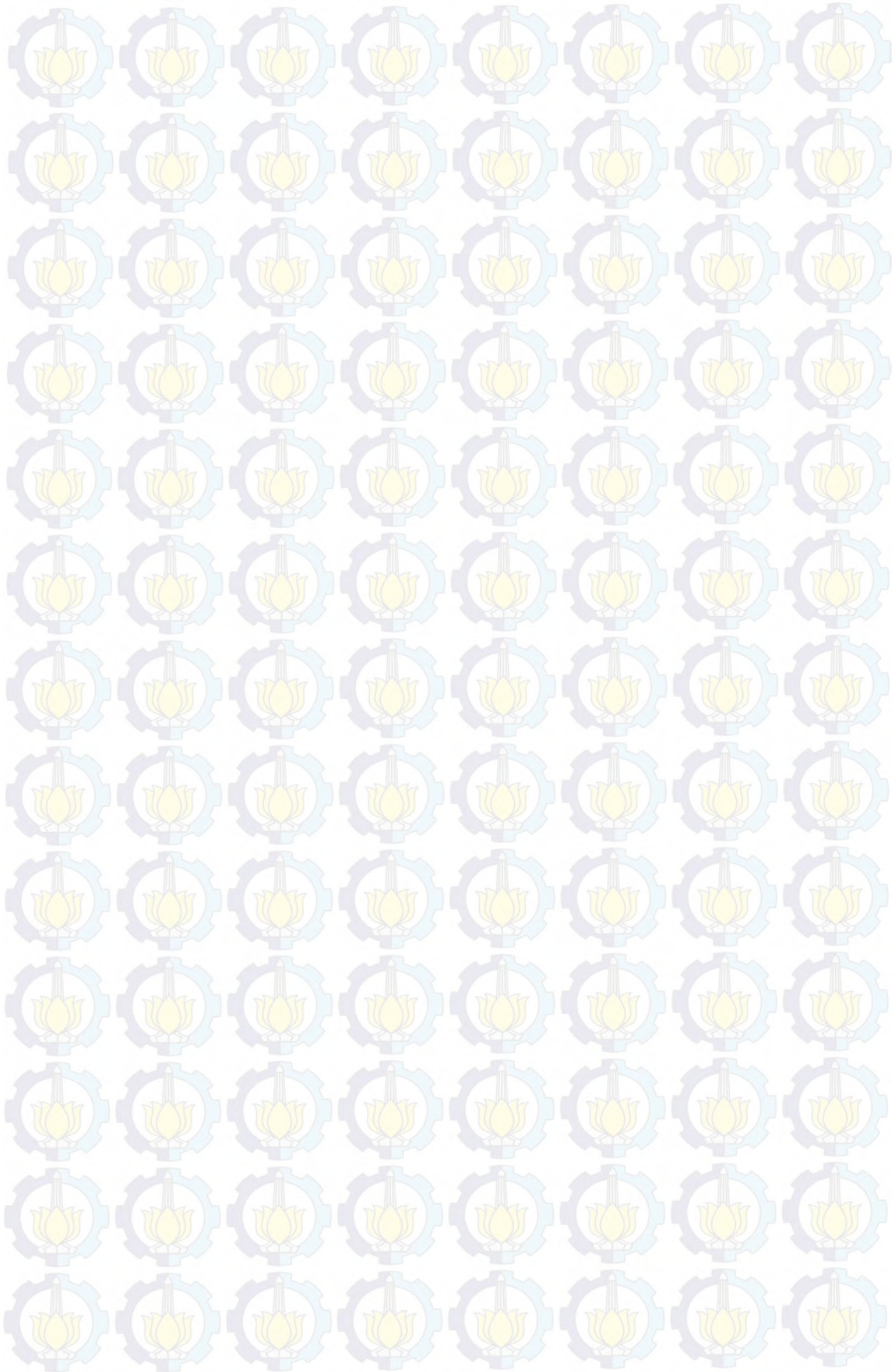
- f. Mengidentifikasi pola sebaran data curah hujan dasarian pada tahun 1961-2003
- g. Mengidentifikasi pola sebaran data curah hujan per periode
- h. Melakukan estimasi parameter untuk setiap periode dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Probability Weighted Moments* (PWM), serta membuat *confidence interval*  $(1-\alpha)\times 100\%$  untuk masing-masing estimasi parameter yang telah diperoleh dengan metode MLE
- i. Melakukan pengujian hipotesis untuk setiap estimasi parameter yang diperoleh dari metode MLE menggunakan pendekatan normal
- j. Melakukan pemeriksaan kesesuaian pola sebaran data terhadap pola sebaran teoritis (uji kesesuaian distribusi) menggunakan Kolmogorov Smirnov
- k. Menghitung nilai estimasi *return level*
- l. Mengulangi langkah a sampai j dengan menggunakan data ekstrem hasil simulasi



Diagram alur metode analisis data yang digunakan pada penelitian ini disajikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram Alur Metode Analisis Data





## BAB 4

### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas estimasi parameter distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Probability Weighted Moments* (PWM). Parameter yang akan diestimasi antara lain :  $\mu$  adalah parameter lokasi (*location*),  $\sigma$  adalah parameter skala (*scale*), dan  $\xi$  adalah parameter bentuk (*shape*). Kemudian menerapkan *Extreme Value Theory* (EVT) dalam mengidentifikasi perubahan iklim di Jakarta pada periode Januari 1961 sampai Desember 2003. Pada penelitian ini, selain menggunakan data real yaitu data dasarian di Stasiun Jakarta pada periode Januari 1961 sampai Desember 2003, digunakan juga data simulasi.

#### 4.1 Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value*

Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) merupakan keluarga dari distribusi kontinu yang dibangun dalam *Extreme Value Theory* (EVT) untuk mengkombinasikan distribusi Gumbel, Frechet, dan Weibull yang dikenal sebagai distribusi *extreme value* tipe I, II, dan III. Diketahui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah data sampel curah hujan yang diperoleh dari metode *Block Maxima*. Dalam penelitian ini parameter  $\mu$ ,  $\sigma$ , dan  $\xi$  diestimasi dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Probability Weighted Moments* (PWM).

##### 4.1.1 Estimasi Parameter Distribusi GEV dengan Metode *Maximum Likelihood Estimation*

Hal utama dalam mengestimasi parameter dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah memaksimumkan fungsi *likelihood* yang merupakan fungsi peluang bersama dari  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Berikut adalah *Probability Distribution Function* (PDF) untuk distribusi GEV.

$$f(x; \mu, \sigma, \xi) = \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \quad \text{untuk } \xi \neq 0 \quad (4.1)$$

sehingga fungsi *likelihood* dari persamaan (4.1) adalah

$$\begin{aligned}
 L(\mu, \sigma, \xi | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma, \xi) \\
 L(\mu, \sigma, \xi) &= \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \exp \left\{ - \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \right] \\
 &= \left( \frac{1}{\sigma} \right)^n \left[ \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \right] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \\
 &= (\sigma)^{-n} \left[ \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} \right] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya adalah memaksimumkan fungsi *likelihood* dengan cara membuat  $\ln$  dari fungsi *likelihood* pada persamaan (4.2).

$$\begin{aligned}
 \ln L(\mu, \sigma, \xi) &= \ln (\sigma)^{-n} + \left( -\frac{1}{\xi} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \\
 &= -n \ln (\sigma) - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi}} \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Turunan pertama  $\ln L(\mu, \sigma, \xi)$  terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi adalah sebagai berikut (penurunan selengkapnya di Lampiran 3A).

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} = \left( \frac{1 + \xi}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \right) \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{\frac{1}{\xi} - 1} = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} &= \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\} - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-1} \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) - \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{\frac{1}{\xi} - 1} \left[ \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right] = 0 \quad (4.6)
 \end{aligned}$$



Berdasarkan persamaan (4.4), (4.5), dan (4.6) dapat diketahui bahwa hasil persamaan turunan pertama dari fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter adalah tidak *closed form* sehingga dibutuhkan analisis numerik untuk menyelesaikan persamaan-persamaan tersebut. Pada penelitian ini, analisis numerik yang digunakan adalah Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) Quasi Newton. Langkah pertama adalah membuat turunan kedua fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi, penurunan selengkapnya dapat dilihat di Lampiran 3B.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu^2} = \left( \frac{\xi + \xi^2}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} - \left( \frac{1 + \xi}{\sigma^2} \right) \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi} - 2} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} = & \frac{n}{\sigma^2} + (1 + \xi) \sum_{i=1}^n \left[ -2 \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^3} \right) \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-1} + \left( \xi \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^4} \right) \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-2} \right] - \\ & \sum_{i=1}^n \left[ -2 \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma^3} \right) \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi} - 1} + \left( \xi \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^4} \right) \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi} - 2} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi^2} = & -\frac{2}{\xi^3} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) + \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) - \\ & \left[ -\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right) - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-2} \right] - \\ & \left[ \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[ \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right] \frac{1}{\xi^2} \right] + \\ & \left[ \frac{2}{\xi^3} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} + \left[ \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right)^{-\frac{1}{\xi}} \left[ \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right) - \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \frac{\left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)}{1 + \xi \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)} \right] \right] \right] \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{\xi}\right) + \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}} \left( \frac{\frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right) \quad (4.9)$$

Berikut adalah turunan kedua fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap kombinasi masing-masing parameter yang selengkapnya dapat dilihat di Lampiran 3C.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{(1+\xi)}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} - \left(\frac{\xi + \xi^2}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}-1} - \frac{(1+\xi)}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}-2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} - \left(\frac{1+\xi}{\sigma}\right) \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}-1} \left[ \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right] \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} = \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-1} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) - (1+\xi) \sum_{i=1}^n \left(\frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3}\right) \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \left[ \sum_{i=1}^n \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^{\frac{1}{\xi}-1} \left( \frac{1}{\xi^2} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)} \right) \right] \quad (4.12)$$

Berdasarkan persamaan (4.4), (4.5), dan (4.6) dapat dibentuk matriks  $g(\boldsymbol{\theta}^{(k)})$  yang elemen-elemennya berisi turunan pertama fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter.

$$g(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$



Selain itu berdasarkan persamaan (4.7) sampai (4.12) dapat dibentuk matriks Hessian  $H^{(k)}$  yang elemen-elemen diagonal utamanya berisi turunan kedua fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter, elemen-llemen yang lain berisi turunan kedua fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap kombinasi masing-masing parameter, dan bersifat simetris.

$$H^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \mu \partial \xi} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \sigma \partial \xi} & \frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma, \xi)}{\partial \xi^2} \end{bmatrix}$$

Berikut adalah rumus umum yang digunakan untuk iterasi BFGS Quasi Newton.

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)} \quad (4.13)$$

dengan nilai  $\alpha^{(k)}$  adalah fungsi yang dapat meminimumkan *error* yang akan terjadi dimana  $\alpha^{(k)} = \arg \min_{\alpha} \left[ f(\boldsymbol{\theta}^{(k)} + \alpha^{(k)} S^{(k)}) \right]$  dan  $S^{(k)}$  didefinisikan dengan  $S^{(k)} = -\left( H^{(k)} \right) g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)$ . Kemudian menghitung perubahan  $\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)} = \alpha^{(k)} S^{(k)}$  dan perubahan  $\Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) = g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} \right) - g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)$  sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$H^{(k+1)} = H^{(k)} + \left( 1 + \frac{\Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)^T H^{(k)} \Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)}{\Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}} \right) \frac{\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)} \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)T}}{\Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)T} \Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)} - \frac{H^{(k)} \Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)T} + \left( H^{(k)} \Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)T} \right)^T}{\Delta g\left( \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right)^T \Delta \boldsymbol{\theta}^{(k)}}$$

Iterasi BFGS Quasi Newton dilakukan sampai memenuhi kondisi  $\left\| \boldsymbol{\theta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right\| \leq e$  dengan  $e$  adalah bilangan kecil sekali. Setelah iterasi berhenti akan diperoleh nilai estimasi untuk masing-masing parameter distribusi GEV  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$  untuk  $\xi \neq 0$ .

Pada penelitian ini, iterasi BFGS Quasi Newton dilakukan menggunakan *software* R dengan *library* *extRemes*.

Estimasi parameter distribusi GEV selain untuk parameter bentuk tidak sama dengan nol ( $\xi \neq 0$ ), berikut akan membahas juga estimasi parameter distribusi GEV untuk  $\xi = 0$ . *Probability Distribution Function* (PDF) untuk distribusi GEV dengan  $\xi = 0$  adalah sebagai berikut.

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\} \quad \text{untuk } \xi = 0 \quad (4.14)$$

sehingga fungsi *likelihood* dari persamaan (4.14) adalah

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma) \\ L(\mu, \sigma) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right\} \exp\left\{-\exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \left[ \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \right] \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \\ &= (\sigma)^{-n} \left[ \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \right] \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

dan  $\ln$  dari fungsi *likelihood* adalah

$$\begin{aligned} \ln L(\mu, \sigma) &= \ln(\sigma)^{-n} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \\ &= -n \ln(\sigma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Berikut adalah turunan pertama  $\ln L(\mu, \sigma)$  terhadap masing-masing parameter yang akan diestimasi, penurunan selengkapnya dapat dilihat di Lampiran 4A.

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = \frac{n}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) = 0 \quad (4.18)$$

Berdasarkan persamaan (4.17) dan (4.18) menunjukkan bahwa turunan pertama fungsi  $\ln$  *likelihood* terhadap masing-masing parameter menghasilkan bentuk tidak *closed form*, oleh karena itu digunakan iterasi BFGS Quasi Newton.



Langkah pertama adalah membuat turunan kedua ln fungsi *likelihood* terhadap masing-masing parameter dan kombinasi masing-masing parameter, penurunan selengkapnya dapat dilihat di Lampiran 4B.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^3}\right) + \left[ -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^3}\right) \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right)^2 \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma^2} - \left[ -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) \right] \quad (4.21)$$

Langkah selanjutnya sama seperti estimasi parameter untuk  $\xi \neq 0$ , yaitu membuat matriks Hessian  $H^{(k)}$  dan  $g(\theta^{(k)})$  yang kemudian digunakan untuk iterasi BFGS Quasi Newton menggunakan *software* R dengan *library* *extRemes*, sehingga diperoleh nilai estimasi untuk setiap parameter GEV  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  untuk  $\xi = 0$ .

#### 4.1.2 Estimasi Parameter Distribusi GEV dengan Metode *Probability Weighted Moments*

Parameter lokasi ( $\mu$ ), skala ( $\sigma$ ), dan parameter bentuk ( $\xi$ ) dari distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) selain dapat diestimasi menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), parameter-parameter tersebut dapat juga diestimasi menggunakan metode *Probability Weighted Moments* (PWM). Fungsi PWM dari variabel random  $X$  dengan *Cumulative Distribution Function*  $F(X)$  adalah :

$$M_{p,r,s} = E \left[ X^p (F(X))^r (1 - F(X))^s \right] \text{ dengan } p, r, s = \text{bilangan real} \quad (4.22)$$

*Subclass* dari persamaan (4.22) adalah  $M_{1,r,s}$  ( $p = 1, r = 0, 1, 2, \dots, s = 0, 1, 2, \dots$ ).  $M_{1,r,s}$  dapat dibagi menjadi dua bagian, yaitu  $s = 0$   $M_{1,r,0}$  dan  $r = 0$   $M_{1,0,s}$ . Berikut adalah fungsi PWM dari variabel random  $X$  untuk  $M_{1,r,0}$  dan  $M_{1,0,s}$ .

$$M_{1,r,0} = E \left[ X (F(X))^r \right] \text{ dengan } r = 0, 1, 2, \dots$$

$$M_{1,0,s} = E \left[ X (1 - F(X))^s \right] \text{ dengan } s = 0, 1, 2, \dots$$

Pada umumnya fungsi PWM yang digunakan untuk mengestimasi parameter distribusi GEV adalah  $\beta_r = M_{1,r,0} = E \left[ X (F(X))^r \right]$  dan rumus tersebut digunakan untuk analisis selanjutnya.

$$\begin{aligned} \beta_r &= M_{1,r,0} = E \left[ X (F(X))^r \right] \\ &= \frac{1}{r+1} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (r+1)^{-\xi} \Gamma(1+\xi) \right) \right\}, \quad \xi < 1, \quad \xi \neq 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

PWM dari  $\beta_r$  dapat diestimasi dengan estimator *unbiased* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_r &= \hat{M}_{1,r,0} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( \prod_{\ell=1}^r \frac{j-\ell}{n-\ell} \right) x_{[j]} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)(j-2)\dots(j-r)}{(n-1)(n-2)\dots(n-r)} x_{[j]} \end{aligned} \quad (4.24)$$

dengan  $x_{[j]}$  menunjukkan tingkat pengamatan dimana  $x_{[1]}$  adalah pengamatan terkecil dan  $x_{[n]}$  adalah pengamatan terbesar,  $n$  adalah jumlah pengamatan, dan nilai  $r > 0$ . Berdasarkan persamaan (4.24) dapat dituliskan rumus untuk  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$  sebagai berikut.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{[j]} = \bar{x} \quad (4.25)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)}{(n-1)} x_{[j]} \quad (4.26)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)(j-2)}{(n-1)(n-2)} x_{[j]} \quad (4.27)$$

Untuk mendapatkan estimasi parameter lokasi ( $\hat{\mu}$ ) dari distribusi GEV dapat menggunakan persamaan (4.23).

$$\beta_0 = \frac{1}{0+1} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (0+1)^{-\xi} \Gamma(1+\xi) \right) \right\} = \mu + \frac{\sigma}{\xi} (1 - \Gamma(1+\xi))$$



$$\hat{\beta}_0 = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left( 1 - \Gamma(1 + \hat{\xi}) \right)$$

sehingga estimasi parameter lokasi dari distribusi GEV adalah

$$\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left( \Gamma(1 + \hat{\xi}) - 1 \right) \quad (4.28)$$

dengan  $\hat{\beta}_0$  menggunakan rumus pada persamaan (4.25)

Untuk mendapatkan estimasi parameter skala ( $\hat{\sigma}$ ) dan parameter bentuk ( $\hat{\xi}$ ), langkah pertama adalah menentukan  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  seperti berikut.

$$\beta_1 = \frac{1}{1+1} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (1+1)^{-\xi} \Gamma(1 + \xi) \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (2)^{-\xi} \Gamma(1 + \xi) \right) \right\}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2+1} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (2+1)^{-\xi} \Gamma(1 + \xi) \right) \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \mu + \frac{\sigma}{\xi} \left( 1 - (3)^{-\xi} \Gamma(1 + \xi) \right) \right\}$$

Sehingga hasil dari  $2\beta_1 - \beta_0$  dan  $3\beta_2 - \beta_0$  adalah (hasil selengkapnya dapat dilihat di Lampiran 5).

$$2\beta_1 - \beta_0 = \frac{\sigma}{\xi} \Gamma(1 + \xi) (1 - 2^{-\xi}) \quad \text{dan} \quad 3\beta_2 - \beta_0 = \frac{\sigma}{\xi} \Gamma(1 + \xi) (1 - 3^{-\xi})$$

Perbandingan antara  $2\beta_1 - \beta_0$  dan  $3\beta_2 - \beta_0$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{3\beta_2 - \beta_0}{2\beta_1 - \beta_0} = \frac{\frac{\sigma}{\xi} \Gamma(1 + \xi) (1 - 3^{-\xi})}{\frac{\sigma}{\xi} \Gamma(1 + \xi) (1 - 2^{-\xi})} = \frac{(1 - 3^{-\xi})}{(1 - 2^{-\xi})} \quad (4.29)$$

Berdasarkan persamaan (4.29) diperoleh estimasi parameter bentuk ( $\hat{\xi}$ ) sebagai berikut.

$$\hat{\xi} = 7,8590 \, c + 2,9554 \, c^2 \quad (4.30)$$

$$\text{dengan } c = \frac{2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0}{3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0} - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

Sedangkan perhitungan untuk estimasi parameter skala ( $\hat{\sigma}$ ) adalah

$$2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \Gamma(1 + \hat{\xi}) (1 - 2^{-\hat{\xi}})$$

$$(2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0) \hat{\xi} = \hat{\sigma} \left\{ \Gamma(1 + \hat{\xi}) (1 - 2^{-\hat{\xi}}) \right\} \text{ sehingga diperoleh}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{(2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0) \hat{\xi}}{\left\{ \Gamma(1 + \hat{\xi}) (1 - 2^{-\hat{\xi}}) \right\}} \quad (4.31)$$

## 4.2 Menerapkan *Extreme Value Theory* dalam Mengidentifikasi Perubahan Iklim di Jakarta

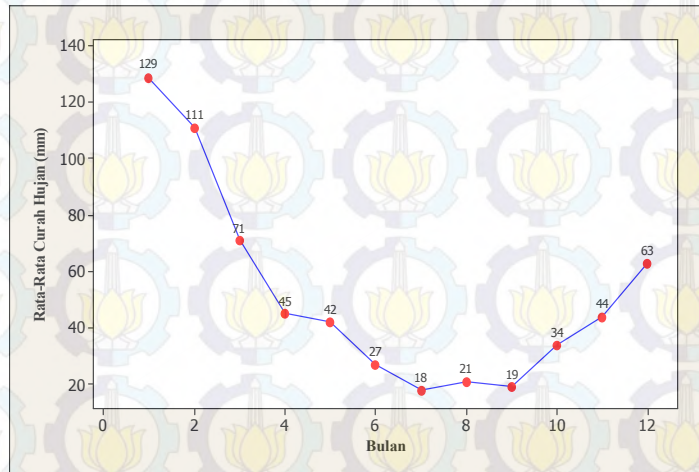
Pada penelitian ini, *Extreme Value Theory* (EVT) diterapkan pada data curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta (BMKG) pada periode Januari 1961 sampai Desember 2003. Untuk mengetahui gambaran umum karakteristik curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta digunakan statistika deskriptif. Kemudian mengidentifikasi nilai ekstrem menggunakan metode *Block Maxima* dengan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV), membuat estimasi parameter distribusi GEV dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Probability Weighted Moments* (PWM), membuat *confidence interval* 95% untuk setiap estimasi parameter yang diperoleh dengan metode MLE, pengujian hipotesis untuk setiap estimasi parameter dengan pendekatan normal, uji kesesuaian distribusi, dan menghitung nilai estimasi *return level*.

### 4.2.1 Deskripsi Data Curah Hujan

Deskripsi suatu data bertujuan untuk mengetahui gambaran umum karakteristik dari data tersebut. Rata-rata curah hujan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 adalah 51,98 mm/bulan, curah hujan maksimum dan minimum berturut-turut adalah 429 mm dan 0 mm. Pola curah hujan dapat dilihat dari plot rata-rata curah hujan bulanan. Gambar 4.1 menunjukkan bahwa rata-rata curah hujan bulanan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 menyerupai pola huruf U,

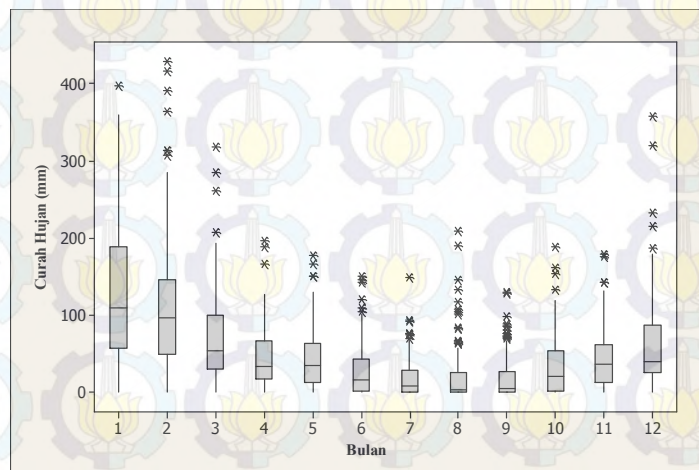


hal ini menunjukkan bahwa pola curah hujan di Stasiun Jakarta adalah monsun yang bersifat unimodal (satu puncak musim hujan).



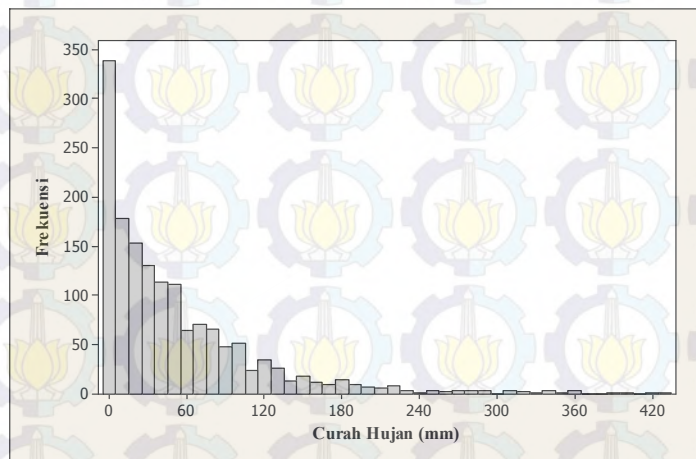
Gambar 4.1 Rata-Rata Curah Hujan Setiap Bulan di Stasiun Jakarta Tahun 1961-2003

Rata-rata curah hujan setiap bulan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 dapat juga digambarkan dengan *boxplot* seperti yang terlihat pada Gambar 4.2. Menurut Soemartini (2007), suatu pengamatan dikatakan *outlier* apabila nilainya kurang dari  $1,5 \times (K3 - K1)$  terhadap kuartil 1 atau nilainya lebih dari  $1,5 \times (K3 - K1)$  terhadap kuartil 3. Pada Gambar 4.2 terlihat bahwa terdapat beberapa pengamatan yang nilainya berada lebih dari  $1,5 \times (K3 - K1)$  terhadap kuartil 3 untuk setiap bulan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003.



Gambar 4.2 *Boxplot* Rata-Rata Curah Hujan Setiap Bulan di Stasiun Jakarta Tahun 1961-2003

Gambar 4.3 menunjukkan bahwa pola sebaran data curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 memiliki ekor distribusi yang turun secara lambat bila dibandingkan dengan distribusi normal, akibatnya peluang terjadinya nilai ekstrem akan lebih besar daripada pemodelan dengan distribusi normal atau yang biasa disebut dengan ekor distribusi yang gemuk (*heavy tail*). Hal tersebut mengindikasikan adanya kejadian ekstrem dan metode statistika yang dikembangkan berkaitan dengan analisis kejadian ekstrem adalah *Extreme Value Theory* (EVT). Metode ini berfokus pada perilaku ekor (*tail*) suatu distribusi untuk dapat menentukan probabilitas nilai-nilai ekstremnya.



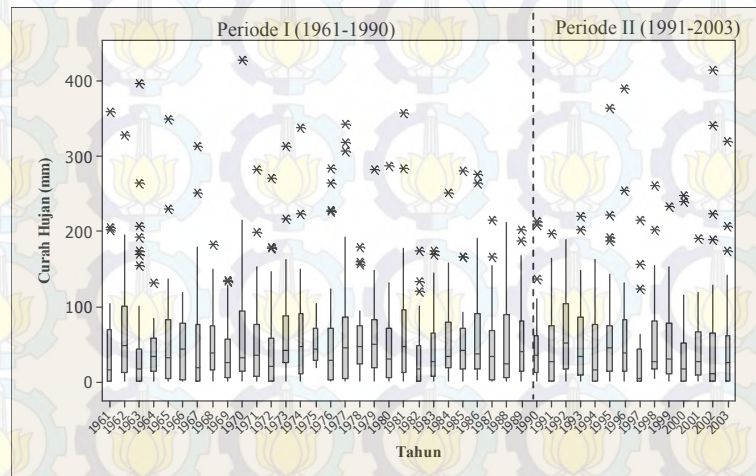
Gambar 4.3 Histogram Curah Hujan di Stasiun Jakarta Tahun 1961-2003

Salah satu indikasi adanya data ekstrem dapat ditunjukkan dengan adanya pengamatan *outlier*. Gambar 4.4 menunjukkan bahwa terdapat pengamatan *outlier* di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 yang ditunjukkan dengan banyaknya pengamatan yang nilainya berada lebih dari  $1,5 \times (K3 - K1)$  terhadap kuartil 3. Berdasarkan tahun 1961-2003 (43 tahun), terdapat 38 tahun yang mengandung pengamatan *outlier* dan 5 tahun yang tidak mengandung pengamatan *outlier*, yaitu tahun 1966, 1975, 1988, 1992, dan tahun 1994.

Untuk mengetahui adanya perubahan iklim di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003, data dasarian curah hujan dibagi menjadi dua periode yaitu periode I (Januari 1961 sampai Desember 1990) dan periode II (Januari 1991 sampai 2003). Pada periode I dan II, rata-rata curah hujan dasarian berturut-turut sebesar 53,08 mm/bulan dan 49,43 mm/bulan, curah hujan maksimum berturut-turut sebesar 429

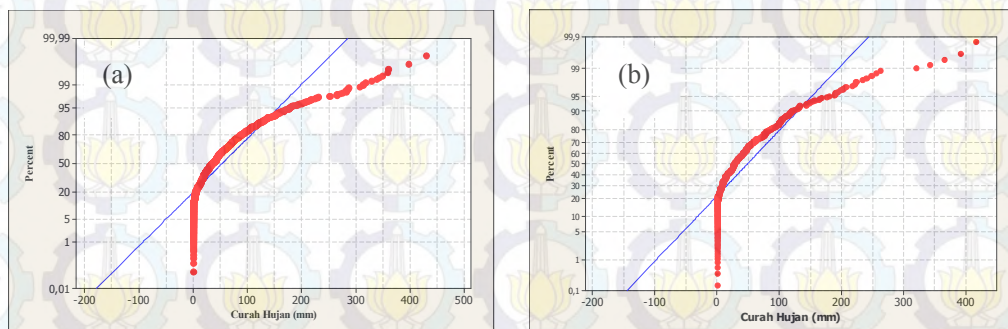


mm dan 416 mm, serta curah hujan minimum pada periode I dan II sama yaitu sebesar 0 mm.



Gambar 4.4 *Boxplot* Curah Hujan di Stasiun Jakarta Tahun 1961-2003

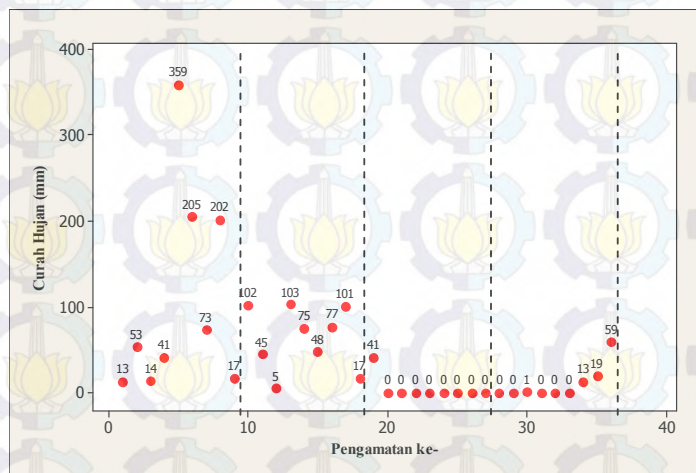
Selain dengan indikasi adanya ekor distribusi yang turun secara lambat (*heavy tail*), EVT dapat digunakan dengan indikasi adanya pengamatan pada *Normal Probability Plot* yang tidak mengikuti garis lurus. Karena terdapat banyak pengamatan *outlier* di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.4, hal ini menyebabkan pola pada *Normal Probability Plot* tidak mengikuti garis lurus seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5. Karena data curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I dan II mempunyai ekor distribusi yang turun secara lambat (*heavy tail*) dan pola pada *Normal Probability Plot* tidak mengikuti garis lurus, maka pada penelitian ini dapat menggunakan EVT dengan pengambilan data ekstrem menggunakan metode *Block Maxima*.



Gambar 4.5 *Normal Probability Plot* Curah Hujan pada Periode I (a) dan Periode II (b)

#### 4.2.2 Identifikasi Nilai Ekstrem

Metode yang digunakan untuk mengidentifikasi nilai ekstrem adalah metode *Block Maxima* dengan pendekatan distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV). Pada metode ini, data curah hujan dasarian di Stasiun Jakarta untuk periode I dan II dibagi dalam blok 3 bulanan. Blok tersebut adalah Desember-Januari-Februari (DJF) merupakan periode musim hujan, Maret-April-Mei (MAM) merupakan periode transisi dari musim hujan menuju musim kemarau, Juni-Juli-Agustus (JJA) merupakan periode musim kemarau, dan September-Oktober-Nopember (SON) merupakan periode transisi dari musim kemarau menuju musim hujan. Kemudian untuk setiap blok ditentukan besarnya data curah hujan maksimum dan data tersebut adalah data ekstrem untuk setiap blok dan digunakan sebagai sampel untuk analisis selanjutnya. Gambar 4.6 adalah ilustrasi pengambilan data sampel curah hujan dasarian dengan metode *Block Maxima* di Stasiun Jakarta pada periode Januari 1961 sampai Desember 1961.

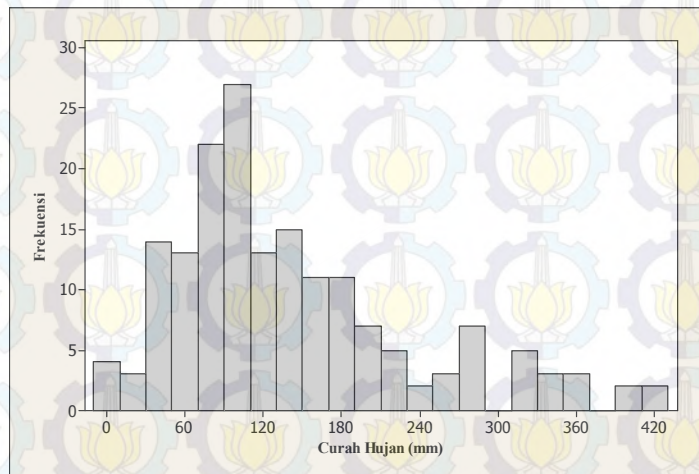


Gambar 4.6 Pengambilan Data Sampel di Stasiun Jakarta pada Periode Januari 1961-Desember 2003 dengan Metode *Block Maxima*

Sebagai contoh, dengan metode *Block Maxima*, data curah hujan dasarian pada tahun 1961 dibagi dalam blok 3 bulanan, karena data curah hujan yang digunakan adalah data dasarian maka setiap bulan terdapat tiga pengamatan, sehingga dalam satu blok (3 bulanan) terdapat sembilan pengamatan. Data ekstrem adalah data yang mempunyai nilai tertinggi (maksimum) pada setiap blok

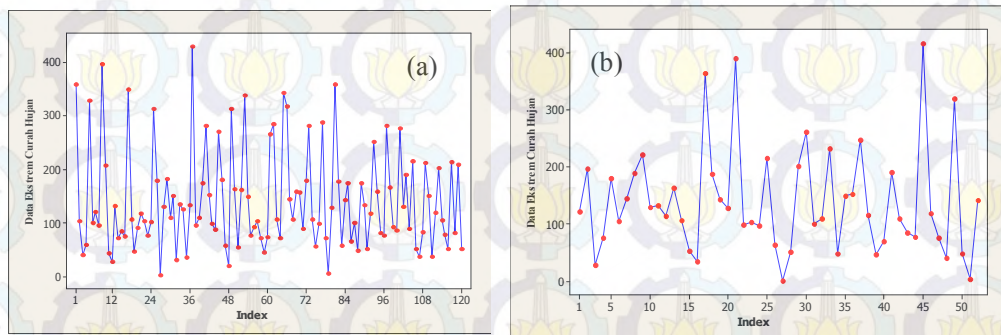


dan digunakan sebagai sampel untuk EVT. Pada Gambar 4.6 menunjukkan bahwa data ekstrem pada tahun 1961 adalah 359 mm, 103 mm, 41 mm, dan 59 mm. Untuk pengambilan data sampel pada tahun-tahun berikutnya dilakukan dengan cara yang sama, yaitu mengambil satu pengamatan yang mempunyai nilai tertinggi (maksimum) pada setiap blok. Dengan metode *Block Maxima* diperoleh 172 data ekstrem pada tahun 1961-2003, dengan rincian 120 data ekstrem untuk periode I (1961-1990) dan 52 data ekstrem untuk periode II (1991-2003), selengkapnya dapat disajikan pada Lampiran 2. Untuk melihat pola dari data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 ditunjukkan dengan histogram pada Gambar 4.7.



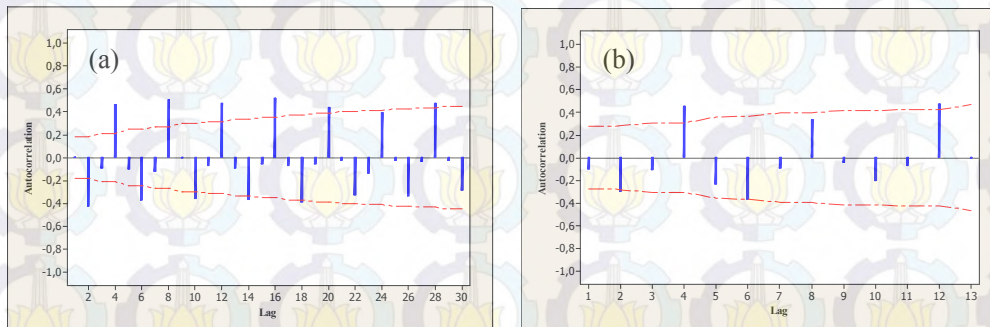
Gambar 4.7 Histogram Data Ekstrem Curah Hujan di Stasiun Jakarta Tahun 1961-2003

Berikut adalah *time series plot* untuk data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003).



Gambar 4.8 Time Series Plot Data Ekstrem Curah Hujan pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Asumsi yang harus dipenuhi pada analisis *Extreme Value Theory* (EVT) dengan pendekatan distribusi GEV adalah data bersifat random. Untuk mengetahui kerandoman dari suatu data dapat menggunakan plot *Autocorrelation Function* (ACF). Apabila nilai ACF dari suatu data kurang dari batas bawah atau lebih dari batas atas fungsi *autocorrelation*, maka dikatakan bahwa data tersebut bersifat tidak random. Berikut adalah plot ACF data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003).



Gambar 4.9 Plot *Autocorrelation Function* Data Ekstrem Curah Hujan pada Periode I (a) dan Periode II (b)

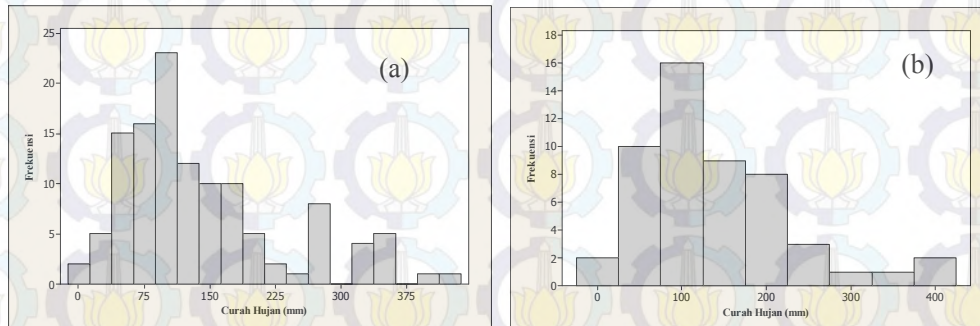
Berdasarkan Gambar 4.9 terlihat bahwa terdapat beberapa nilai ACF pada periode I dan periode II yang kurang dari batas bawah atau lebih dari batas atas fungsi *autocorrelation*, khususnya pada lag 4 yang berarti bahwa nilai ekstrem pada tiga bulan tertentu berkorelasi kuat dengan nilai ekstrem satu tahun sebelumnya atau sesudahnya. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I dan periode II tidak bersifat random. Akan tetapi pada penelitian ini, data ekstrem tersebut tetap digunakan untuk analisis selanjutnya dan untuk memperjelas analisis mengenai *Extreme Value Theory* (EVT), maka digunakan juga simulasi data yang bersifat random.

#### 4.2.3 Distribusi Data Ekstrem Curah Hujan pada Periode I (1961-1990) dan Periode II (1991-2003)

Pola distribusi dari data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 ditunjukkan dengan histogram pada Gambar 4.7, sedangkan untuk



mengetahui pola distribusi data ekstrem curah hujan pada periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003) dapat ditunjukkan dengan histogram sebagai berikut.



Gambar 4.10 Histogram Data Ekstrem Curah Hujan pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Berdasarkan Gambar 4.10 terlihat bahwa data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I dan II mempunyai pola yang sama. Untuk mengetahui adanya perubahan iklim di Stasiun Jakarta pada periode I dan II, beberapa tahapan yang dilakukan adalah membuat estimasi parameter distribusi GEV untuk setiap periode dengan metode MLE dan PWM, membuat *confidence interval* 95% untuk setiap estimasi parameter yang diperoleh dengan MLE, pengujian hipotesis untuk setiap estimasi parameter dengan pendekatan normal, uji kesesuaian distribusi, dan menghitung nilai estimasi *return level*.

#### 4.2.4 Estimasi Parameter Distribusi *Generalized Extreme Value*

Tabel 4.1 menunjukkan hasil estimasi parameter distribusi GEV dengan metode MLE dan PWM serta *confidence interval* 95% untuk setiap estimasi parameter yang diperoleh dengan metode MLE. Parameter lokasi  $\mu$  menunjukkan letak titik pemusatan data, parameter skala  $\sigma$  menunjukkan pola keragaman data, dan parameter bentuk  $\xi$  menunjukkan perilaku titik ujung kanan dari fungsi peluangnya. Berdasarkan Tabel 4.1 terlihat bahwa nilai estimasi parameter lokasi  $\mu$  yang diperoleh dengan metode MLE untuk periode I dan II dengan titik pemusatan data pada 96,39 mm dan 95,60 mm, sedangkan nilai estimasi parameter lokasi  $\mu$  yang diperoleh dengan metode PWM untuk periode I dan II dengan titik pemusatan data pada 96,04 mm dan 94,62 mm. Selain itu nilai setiap estima-

si parameter yang diperoleh dengan metode MLE terletak pada *confidence interval* 95%.

Tabel 4.1 Estimasi Parameter dan *Confidence Interval* 95% untuk Distribusi GEV

Parameter	Metode			
	MLE		PWM	
	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)
$\hat{\mu}$ SE ( $\hat{\mu}$ )	96,39 [83,51; 109,27] 6,57	95,60 [75,18; 116,02] 10,42	96,04	94,62
$\hat{\sigma}$ SE ( $\hat{\sigma}$ )	62,74 [52,68; 72,79] 5,13	66,43 [51,22; 81,64] 7,76	64,17	66,53
$\hat{\xi}$ SE ( $\hat{\xi}$ )	0,14 [-0,02; 0,30] 0,08	0,06 [-0,16; 0,28] 0,11	-0,12	-0,08

#### 4.2.5 Pengujian Hipotesis

Pada penelitian ini, pengujian hipotesis bertujuan untuk mengetahui kesesuaian antara nilai estimasi parameter lokasi, skala, dan nilai estimasi parameter bentuk dengan nilai dugaan awal. Dengan pengujian hipotesis untuk estimasi parameter bentuk dapat diketahui tipe distribusi GEV (Gumbel, Frechet, atau Weibull) dari data ekstrem curah hujan pada periode I dan II. Berdasarkan hipotesis menggunakan statistik uji pada persamaan (2.22), (2.23), dan (2.24) diperoleh hasil sebagai berikut.

Tabel 4.2 Pengujian Hipotesis dengan Pendekatan Normal

Periode	Parameter $\mu$		$Z_{hitung}$	$Z_{\alpha/2}$	Keputusan	Parameter $\sigma$		$Z_{hitung}$	$Z_{\alpha/2}$	Keputusan
	$\hat{\mu}$	$\mu_0$				$\hat{\sigma}$	$\sigma_0$			
I	96,39	95,99	0,06	1,96	Gagal	62,74	64,58	-0,36	1,96	Gagal
SE	6,57				Tolak $H_0$	5,13				Tolak $H_0$
II	95,60	95,99	-0,04	1,96	Gagal	66,43	64,58	0,24	1,96	Gagal
SE	10,42				Tolak $H_0$	7,76				Tolak $H_0$



Lanjutan Tabel 4.2 Pengujian Hipotesis dengan Pendekatan Normal

Periode	Parameter $\xi$		$Z_{hitung}$	$Z_{\alpha/2}$	Keputusan
	$\hat{\xi}$	$\xi_0$			
I	0,14	0,1	0,5	1,96	Gagal Tolak $H_0$
SE	0,08				
II	0,06	0,1	-0,36	1,96	Gagal Tolak $H_0$
SE	0,11				

Berdasarkan Tabel 4.2 terlihat bahwa nilai  $|Z_{hitung}|$  untuk parameter  $\mu, \sigma$ , dan  $\xi$  pada periode I dan II kurang dari nilai  $Z_{\alpha/2}$  sehingga disimpulkan gagal tolak  $H_0$ , artinya  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  dan  $\xi = \xi_0$ . Karena diperoleh hasil bahwa  $\xi = \xi_0$  dengan  $\xi_0 = 0$ , maka dapat diartikan bahwa data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I dan II berdistribusi Gumbel.

Nilai estimasi parameter bentuk yang diperoleh dengan metode PWM pada periode I dan II berturut-turut sebesar -0,12 dan -0,08. Karena nilai-nilai tersebut kurang dari nol maka disimpulkan bahwa data ekstrem curah hujan dimana nilai estimasi parameternya diperoleh dengan metode PWM pada periode I dan II berdistribusi Weibull.

Oleh karena tidak ada perubahan distribusi untuk periode I dan II dengan estimasi parameter yang diperoleh baik menggunakan metode MLE maupun PWM maka dapat disimpulkan bahwa tidak ada perubahan iklim di Stasiun Jakarta pada periode Januari 1960-Desember 2003. Kesimpulan tersebut diperkuat oleh penelitian yang dilakukan oleh *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC) 2001 yang menyatakan bahwa di Indonesia tidak terjadi perubahan iklim seperti informasi yang terdapat pada Gambar 2.5.

#### 4.2.6 Uji Kesesuaian Distribusi

Uji kesesuaian distribusi digunakan untuk menguji kesesuaian antara pola sebaran data ekstrem terhadap pola sebaran teoritis. Pada pembahasan sebelumnya diketahui bahwa data ekstrem pada periode I dan II dengan estimasi parameter menggunakan metode MLE berdistribusi Gumbel, sedangkan dengan estimasi



parameter menggunakan metode PWM berdistribusi Weibull. Untuk lebih memperjelas apakah pola sebaran data ekstrem sesuai terhadap pola sebaran teoritis (dalam hal ini distribusi GEV), maka dilakukan uji kesesuaian distribusi menggunakan Kolmogorov Smirnov. Adapun hipotesis yang digunakan adalah :

$H_0$ : Data ekstrem curah hujan mengikuti distribusi GEV

$H_1$ : Data ekstrem curah hujan tidak mengikuti distribusi GEV

Untuk estimasi parameter yang diperoleh dengan metode MLE, diketahui bahwa nilai statistik uji  $D_{hitung}$  untuk periode I dan II berturut-turut adalah 0,084 dan 0,054, sedangkan nilai  $D_{tabel}$  untuk periode I dan II berturut-turut adalah 0,124 dan 0,185. Karena nilai  $D_{hitung} < D_{tabel}$  dengan  $\alpha = 5\%$  untuk setiap periode, sehingga disimpulkan gagal tolak  $H_0$ , artinya data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) untuk periode I maupun periode II.

Untuk estimasi parameter yang diperoleh dengan metode PWM, nilai  $D_{hitung}$  untuk periode I dan II berturut-turut adalah 0,109 dan 0,060, sedangkan nilai  $D_{tabel}$  untuk periode I dan II berturut-turut adalah 0,124 dan 0,185. Karena nilai  $D_{hitung} < D_{tabel}$  dengan  $\alpha = 5\%$  untuk setiap periode, sehingga dapat disimpulkan gagal tolak  $H_0$ , artinya data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta mengikuti distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) untuk periode I maupun periode II.

#### 4.2.7 Return Level

Untuk mengetahui nilai estimasi curah hujan pada periode tertentu, misal mingguan, bulanan, atau tahunan dapat digunakan suatu besaran yang disebut *return level*. Pada penelitian ini, estimasi *return level* menggunakan periode ulang 2, 3, 4, dan 5 blok. Karena blok yang digunakan adalah 3 bulanan maka periode ulang dapat diartikan sebagai 6, 9, 12, dan 15 bulan.

Setelah diperoleh nilai estimasi masing-masing parameter seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.1, kemudian nilai estimasi tersebut digunakan untuk menghitung estimasi *return level* dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.26). Berikut adalah nilai estimasi *return level* untuk periode I dan II dengan nilai estimasi parameter diperoleh menggunakan metode MLE.



Tabel 4.3 Nilai Estimasi *Return Level* (Estimasi Parameter Diperoleh dengan MLE)

Periode Ulang	Periode I (1961-1990)		Periode II (1991-2003)	
	Waktu	Nilai <i>Return Level</i>	Waktu	Nilai <i>Return Level</i>
2 blok = 6 bulan	Januari 1991- Juni 1991	120,01 mm	Januari 2004- Juni 2004	120,23 mm
3 blok = 9 bulan	Januari 1991- September 1991	156,90 mm	Januari 2004- September 2004	157,33 mm
4 blok = 12 bulan	Januari 1991- Desember 1991	182,06 mm	Januari 2004- Desember 2004	181,75 mm
5 blok = 15 bulan	Januari 1991- Maret 1992	201,51 mm	Januari 2004- Maret 2005	200,18 mm

Berdasarkan Tabel 4.3 terlihat bahwa curah hujan maksimum yang diharapkan secara rata-rata dapat dilampaui satu kali dalam jangka waktu 6, 9, 12, dan 15 bulan untuk periode I berturut-turut adalah 120,01 mm; 156,90 mm; 182,06 mm; dan 201,51 mm, sedangkan untuk periode II berturut-turut adalah 120,23 mm, 157,33 mm, 181,75 mm, dan 200,18 mm. Dari hasil tersebut dapat dikatakan bahwa nilai estimasi *return level* pada periode ulang 6, 9, 12, dan 15 bulan hampir sama antara periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003). Berikut adalah hasil nilai estimasi *return level* untuk periode I dan II dengan nilai estimasi parameter diperoleh menggunakan metode PWM.

Tabel 4.4 Nilai Estimasi *Return Level* (Estimasi Parameter Diperoleh dengan PWM)

Periode Ulang	Periode I (1961-1990)		Periode II (1991-2003)	
	Waktu	Nilai <i>Return Level</i>	Waktu	Nilai <i>Return Level</i>
2 blok = 6 bulan	Januari 1991- Juni 1991	129,50 mm	Januari 2004- Juni 2004	129,31 mm
3 blok = 9 bulan	Januari 1991- September 1991	144,44 mm	Januari 2004- September 2004	144,80 mm
4 blok = 12 bulan	Januari 1991- Desember 1991	154,00 mm	Januari 2004- Desember 2004	154,72 mm
5 blok = 15 bulan	Januari 1991- Maret 1992	161,08 mm	Januari 2004- Maret 2005	162,06 mm

Sama halnya dengan nilai estimasi *return level* dimana nilai estimasi parameternya diperoleh dengan MLE, pada Tabel 4.4 menunjukkan bahwa nilai estimasi *return level* untuk periode I dan II dengan periode ulang 6, 9, 12, dan 15 bulan dimana nilai estimasi parameternya menggunakan metode PWM adalah hampir sama. Nilai *return level* untuk periode I dengan periode ulang 6, 9, 12, dan 15 bulan berturut-turut sebesar 129,50 mm; 144,44 mm; 154,00 mm; dan 161,08



mm, sedangkan untuk periode II berturut-turut sebesar 129,31 mm; 144,80 mm; 154,72 mm; dan 162,06 mm.

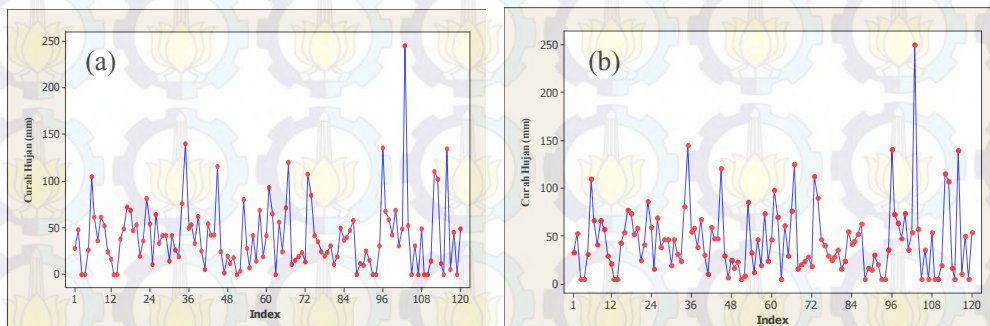
### 4.3 Studi Simulasi Data

Data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003 tidak bersifat random, hal ini ditunjukkan dengan Gambar 4.9 dimana terdapat beberapa nilai ACF yang kurang dari batas bawah atau atau lebih dari batas atas fungsi *autocorrelation*. Selain menggunakan data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada tahun 1961-2003, pada penelitian ini juga menggunakan simulasi data yang bertujuan untuk mengetahui apakah terdapat perbedaan kesimpulan yang diperoleh apabila menggunakan data yang bersifat random dan data yang bersifat tidak random. Terdapat tiga studi simulasi data yang digunakan yaitu : data periode I dan periode II bersifat random, data periode I bersifat tidak random dan data periode II bersifat random, serta data periode I dan periode II bersifat tidak random. Hasil simulasi data untuk tiga kriteria tersebut disajikan pada Lampiran 10, 11, dan 12.

#### 4.3.1 Data Periode I dan Periode II Bersifat Random

##### 4.3.1.1 Deskripsi Data

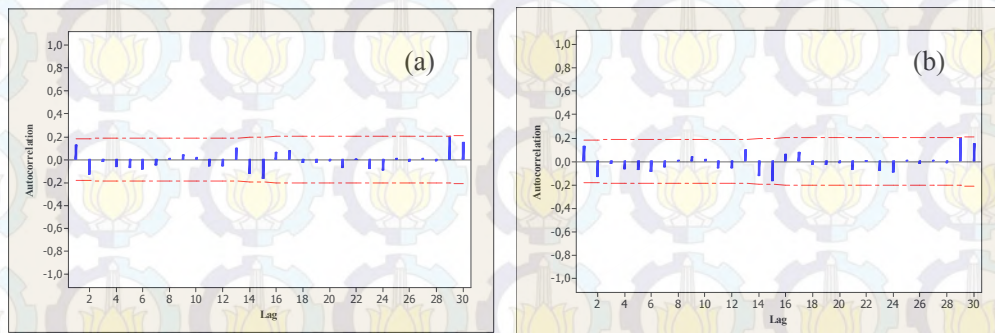
Pengambilan sampel ekstrem untuk data simulasi adalah berdasarkan data dasarian dengan blok 3 bulanan. Oleh karena itu, untuk setiap periode (30 tahun) terdapat 120 data ekstrem. Berikut adalah *timeseries plot* dari data ekstrem hasil simulasi untuk periode I dan II.



Gambar 4.11 *Time Series Plot* Data Ekstrem Hasil Simulasi  
pada Periode I (a) dan Periode II (b)



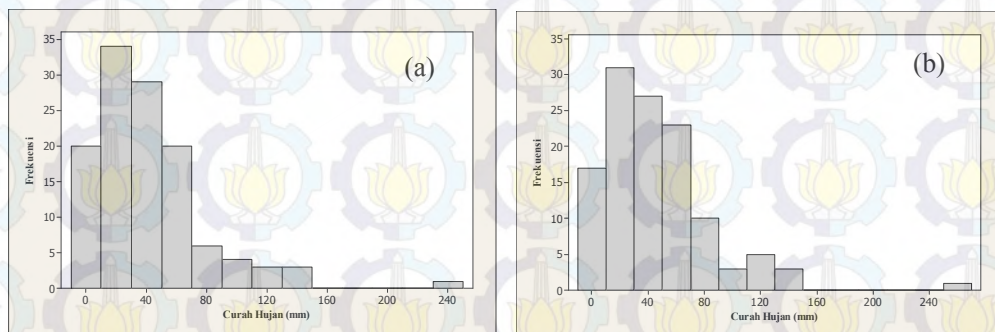
Untuk mengetahui asumsi kerandoman data tersebut terpenuhi atau tidak, maka digunakan plot *Autocorrelation Function* (ACF) dari data ekstrem hasil simulasi untuk setiap periode seperti yang terlihat pada Gambar 4.12. Berdasarkan Gambar 4.12 menunjukkan bahwa semua nilai *autocorrelation* untuk setiap lag pada periode I dan II berada di antara batas bawah dan batas atas fungsi *autocorrelation*. Hal ini menunjukkan bahwa data ekstrem hasil simulasi bersifat random.



Gambar 4.12 Plot *Autocorrelation Function* Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

#### 4.3.1.2 Distribusi Data

Untuk mengetahui pola distribusi dari data ekstrem hasil simulasi dapat menggunakan histogram. Berikut adalah histogram untuk data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II.



Gambar 4.13 Histogram Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Gambar 4.13 menunjukkan bahwa data ekstrem hasil simulasi untuk periode I dan II mempunyai pola distribusi yang sama. Untuk mengetahui adanya

perubahan distribusi atau tidak pada kedua periode tersebut, maka dilakukan estimasi parameter lokasi, skala, dan estimasi parameter bentuk untuk setiap periode.

#### 4.3.1.3 Estimasi Parameter

Sama halnya dengan estimasi parameter untuk data ekstrem curah hujan di Stasiun Jakarta pada periode I (1961-1990) dan periode II (1991-2003) yang dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Probability Weighted Moments* (PWM), pada estimasi parameter untuk data ekstrem hasil simulasi ini juga dilakukan dengan metode MLE dan PWM yang hasilnya dapat dilihat pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Estimasi Parameter dan *Confidence Interval* 95% untuk Data Ekstrem Hasil Simulasi

Parameter	Metode			
	MLE		PWM	
	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)
$\hat{\mu}$	22,43 [17,61; 27,25]	27,43 [22,61; 32,25]	24,41	29,41
SE ( $\hat{\mu}$ )	2,46	2,46		
$\hat{\sigma}$	22,65 [18,75; 26,55]	22,65 [18,75; 26,55]	24,30	24,30
SE ( $\hat{\sigma}$ )	1,99	1,99		
$\hat{\xi}$	0,20 [0,02; 0,38]	0,20 [0,02; 0,38]	-0,13	-0,13
SE ( $\hat{\xi}$ )	0,09	0,09		

Berdasarkan Tabel 4.5 terlihat bahwa nilai estimasi parameter lokasi  $\mu$  yang diperoleh dengan metode MLE untuk periode I dan II dengan titik pemusatan data pada 22,43 mm dan 27,43 mm, sedangkan nilai estimasi parameter lokasi  $\mu$  yang diperoleh dengan metode PWM untuk periode I dan II dengan titik pemusatan data pada 24,41 mm dan 29,41 mm. Selain itu nilai setiap estimasi parameter yang diperoleh dengan metode MLE terletak pada *confidence interval* 95%.



#### 4.3.1.4 Pengujian Hipotesis

Tabel 4.6 menunjukkan hasil pengujian hipotesis untuk parameter lokasi, skala, dan parameter bentuk. Berdasarkan Tabel 4.6 menunjukkan bahwa nilai  $|Z_{hitung}|$  untuk parameter  $\mu$  dan  $\sigma$  pada periode I dan II kurang dari nilai  $Z_{\alpha/2}$  sehingga dapat disimpulkan gagal tolak  $H_0$ , artinya  $\mu = \mu_0$  dan  $\sigma = \sigma_0$ . Sedangkan pengujian hipotesis untuk parameter  $\xi$  diperoleh hasil bahwa nilai  $|Z_{hitung}|$  lebih dari nilai  $Z_{\alpha/2}$  sehingga tolak  $H_0$ , artinya  $\xi \neq \xi_0$ . Karena  $\hat{\xi} \neq 0$  maka disimpulkan bahwa data ekstrem hasil simulasi tidak berdistribusi Gumbel, akan tetapi berdistribusi Frechet karena  $\hat{\xi} > 0$ .

Tabel 4.6 Pengujian Hipotesis untuk Data Ekstrem Hasil Simulasi

Periode	Parameter $\mu$		$Z_{hitung}$	$Z_{\alpha/2}$	Keputusan	Parameter $\sigma$		$Z_{hitung}$	$Z_{\alpha/2}$	Keputusan
	$\hat{\mu}$	$\mu_0$				$\hat{\sigma}$	$\sigma_0$			
I	22,43	24,93	-1,02	1,96	Gagal	22,65	20	1,33	1,96	Gagal
SE	2,46				Tolak $H_0$	1,99				Tolak $H_0$
II	27,43	24,93	1,02	1,96	Gagal	22,65	20	1,33	1,96	Gagal
SE	2,46				Tolak $H_0$	1,99				Tolak $H_0$

Lanjutan Tabel 4.6 Pengujian Hipotesis untuk Data Ekstrem Hasil Simulasi

Periode	Parameter $\xi$		$Z_{hitung}$	$Z_{\alpha/2}$	Keputusan
	$\hat{\xi}$	$\xi_0$			
I	0,2	0	2,22	1,96	Tolak $H_0$
SE	0,09				
II	0,2	0	2,22	1,96	Tolak $H_0$
SE	0,09				

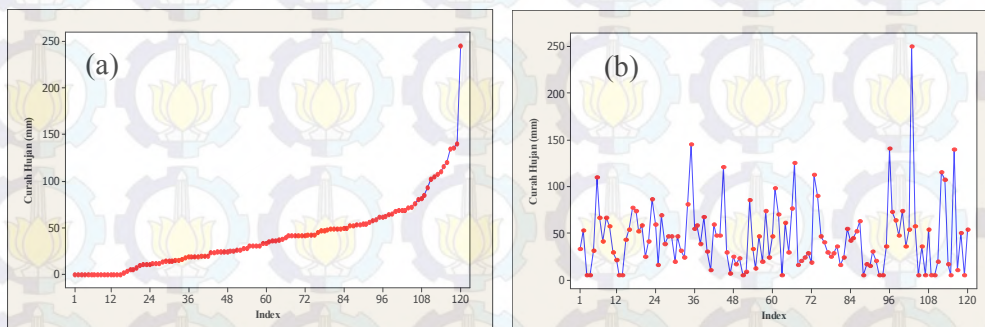
Nilai estimasi parameter bentuk yang diperoleh dengan metode PWM pada periode I dan II adalah sama, yaitu -0,13. Karena nilai-nilai tersebut kurang dari nol maka disimpulkan bahwa data ekstrem hasil simulasi dimana nilai estimasi parameternya diperoleh dengan metode PWM pada periode I dan II berdistribusi Weibull.

Dengan pengujian hipotesis dapat disimpulkan bahwa tidak ada perubahan distribusi untuk periode I dan II dengan estimasi parameter menggunakan metode MLE dan PWM. Dengan metode MLE, distribusi data ekstrem hasil simulasi adalah Frechet sedangkan dengan metode PWM, distribusi data ekstrem hasil simulasi adalah Weibull.

#### 4.3.2 Data Periode I Bersifat Tidak Random dan Data Periode II Bersifat Random

##### 4.3.2.1 Deskripsi Data

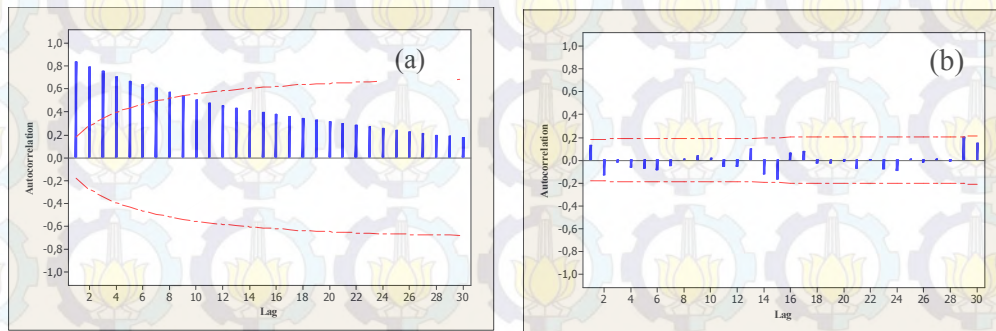
Berdasarkan hasil simulasi diperoleh data ekstrem periode I dan II dengan nilai rata-rata berturut-turut sebesar 40,64 mm/bulan dan 45,64 mm/bulan, nilai maksimum berturut-turut sebesar 245 mm dan 250 mm, serta nilai minimum berturut-turut sebesar 0 mm dan 5 mm. Berikut adalah *timeseries plot* dari data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II.



Gambar 4.14 Time Series Plot Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Berdasarkan Gambar 4.14 terlihat bahwa data ekstrem pada periode I bersifat tidak random yang ditunjukkan dengan plot yang membentuk suatu pola, sedangkan data ekstrem pada periode II bersifat random yang ditunjukkan dengan plot yang tidak membentuk suatu pola (random). Untuk lebih memperjelas sifat kerandoman data ekstrem pada kedua periode tersebut, digunakan plot *Autocorrelation Function* (ACF) sebagai berikut.



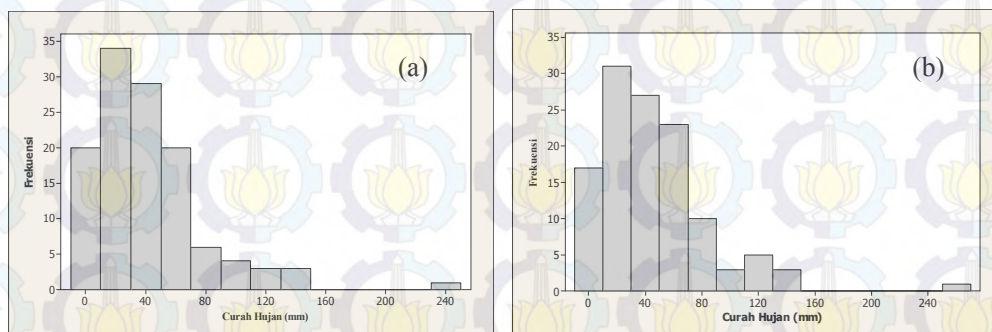


Gambar 4.15 Plot *Autocorrelation Function* Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Gambar 4.15 memperjelas pola data yang ditunjukkan pada Gambar 4.14 dimana terdapat nilai *autocorrelation* pada periode I yang melebihi batas atas fungsi *autocorrelation* sehingga dapat dikatakan bahwa data ekstrem hasil simulasi pada periode I bersifat tidak random, sedangkan nilai *autocorrelation* pada periode II tidak ada yang kurang dari batas bawah atau lebih dari batas atas fungsi *autocorrelation* sehingga dapat dikatakan bahwa data ekstrem hasil simulasi pada periode II bersifat random.

#### 4.3.2.2 Distribusi Data

Distribusi atau pola dari suatu data dapat digambarkan melalui histogram. Berikut adalah histogram dari data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II.



Gambar 4.16 Histogram Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Berdasarkan Gambar 4.16 menunjukkan bahwa distribusi atau pola dari data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II adalah sama. Hal itu merupakan

indikasi awal untuk mengetahui adanya perubahan distribusi atau tidak pada data tersebut. Untuk lebih menguatkan kesimpulan bahwa distribusi atau pola dari data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II adalah sama, maka dilakukan estimasi parameter lokasi, skala, dan estimasi parameter bentuk.

#### 4.3.2.3 Estimasi Parameter

Estimasi parameter lokasi, skala, dan estimasi parameter bentuk yang diperoleh dengan metode MLE dan PWM untuk data ekstrem hasil simulasi disajikan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Estimasi Parameter dan *Confidence Interval* 95% untuk Data Ekstrem Hasil Simulasi

Parameter	Metode			
	MLE		PWM	
	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)
$\hat{\mu}$ SE ( $\hat{\mu}$ )	22,43 [17,61; 27,25] 2,46	27,43 [22,61; 32,25] 2,46	23,20 -	28,20 -
$\hat{\sigma}$ SE ( $\hat{\sigma}$ )	22,65 [18,75; 26,55] 1,99	22,65 [18,75; 26,55] 1,99	24,14 -	24,14 -
$\hat{\xi}$ SE ( $\hat{\xi}$ )	0,20 [0,02; 0,38] 0,09	0,20 [0,02; 0,38] 0,09	-0,13 -	-0,13 -

Tabel 4.7 menunjukkan bahwa nilai estimasi parameter lokasi  $\mu$  yang diperoleh dengan metode MLE untuk periode I dan II dengan titik pemusatan data pada 22,43 mm dan 27,43 mm, sedangkan nilai estimasi parameter lokasi  $\mu$  yang diperoleh dengan metode PWM untuk periode I dan II dengan titik pemusatan data pada 23,20 mm dan 28,20 mm. Selain itu nilai setiap estimasi parameter yang diperoleh dengan metode MLE terletak pada *confidence interval* 95%.

#### 4.3.2.4 Pengujian Hipotesis

Hasil estimasi parameter dengan metode MLE untuk data ekstrem hasil simulasi dengan periode I bersifat tidak random dan periode II bersifat random adalah sama dengan hasil estimasi parameter untuk data ekstrem hasil simulasi



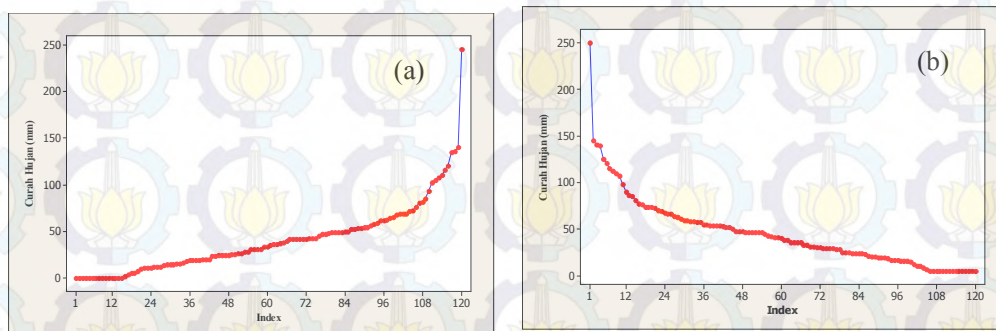
dengan periode I dan II bersifat random (pembahasan sub bab 4.3.1). Sehingga dapat disimpulkan bahwa data ekstrem hasil simulasi dengan periode I bersifat tidak random dan periode II bersifat random berdistribusi Frechet, hal ini ditunjukkan dengan nilai  $\hat{\xi} > 0$ .

Nilai estimasi parameter bentuk yang diperoleh dengan metode PWM pada periode I dan II adalah sama, yaitu -0,13. Karena nilai-nilai tersebut kurang dari nol maka disimpulkan bahwa data ekstrem hasil simulasi dimana nilai estimasi parameternya diperoleh dengan metode PWM pada periode I dan II berdistribusi Weibull.

### 4.3.3 Data Periode I dan Periode II Bersifat Tidak Random

#### 4.3.3.1 Deskripsi Data

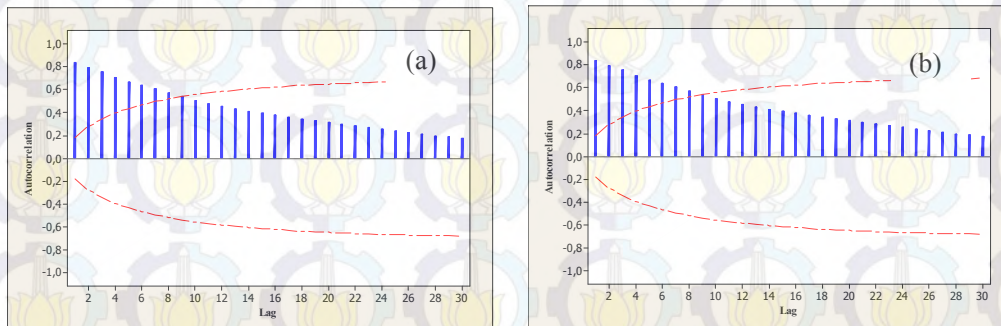
Simulasi selanjutnya sama dengan kedua simulasi sebelumnya, yaitu membangkitkan data ekstrem untuk periode I dan II dimana masing-masing periode berjumlah 120 pengamatan. Data hasil simulasi dapat dilihat pada Lampiran 12. Berikut adalah *timeseries plot* untuk data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II.



Gambar 4.17 Time Series Plot Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Berdasarkan Gambar 4.17 terlihat bahwa data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II membentuk suatu pola. Pola antar pengamatan pada periode I semakin meningkat sedangkan pola antar pengamatan pada periode II semakin menurun. Hal ini mengindikasikan bahwa data tersebut bersifat tidak random.

Untuk lebih memperjelas sifat kerandaman dari data simulasi tersebut, maka digunakan plot *Autocorrelation Function* (ACF).

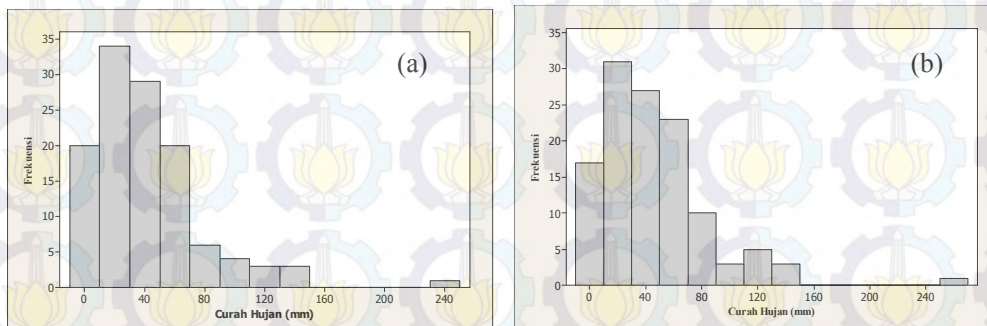


Gambar 4.18 Plot *Autocorrelation Function* Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)

Dari Gambar 4.18 menunjukkan bahwa data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II bersifat tidak random. Hal ini ditunjukkan dengan adanya nilai *autocorrelation* yang melebihi batas atas fungsi *autocorrelation* pada periode I dan II.

#### 4.3.3.2 Distribusi Data

Berdasarkan Gambar 4.19 terlihat bahwa distribusi atau pola data ekstrem hasil simulasi pada periode I dan II adalah sama, artinya tidak terjadi perubahan distribusi pada periode I dan II. Hal tersebut merupakan metode grafis untuk mengetahui terjadinya perubahan distribusi dari suatu data. Untuk lebih memperjelas apakah terjadi perubahan distribusi pada periode I dan II maka dilakukan estimasi parameter dengan metode MLE dan PWM.



Gambar 4.19 Histogram Data Ekstrem Hasil Simulasi pada Periode I (a) dan Periode II (b)



#### 4.3.3.3 Estimasi Parameter

Data simulasi periode I pada sub bab ini sama dengan data simulasi periode I pada sub bab 4.3.2. Sedangkan data simulasi periode II pada sub bab ini berasal dari data simulasi periode II pada sub bab 4.3.2 akan tetapi diurutkan dari terbesar hingga terkecil. Dengan metode MLE dan PWM diperoleh hasil bahwa estimasi parameter pada sub bab ini sama dengan estimasi parameter untuk data ekstrem periode I bersifat tidak random dan periode II bersifat random (pembahasan pada sub bab 4.3.2.3) seperti yang disajikan pada Tabel 4.8..

Tabel 4.8 Estimasi Parameter dan *Confidence Interval* 95% untuk Data Ekstrem Hasil Simulasi

Parameter	Metode			
	MLE		PWM	
	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)	Periode I (1961-1990)	Periode II (1991-2003)
$\hat{\mu}$	22,43 [17,61; 27,25]	27,43 [22,61; 32,25]	23,20	28,20
SE ( $\hat{\mu}$ )	2,46	2,46		
$\hat{\sigma}$	22,65 [18,75; 26,55]	22,65 [18,75; 26,55]	24,14	24,14
SE ( $\hat{\sigma}$ )	1,99	1,99		
$\hat{\xi}$	0,20 [0,02; 0,38]	0,20 [0,02; 0,38]	-0,13	-0,13
SE ( $\hat{\xi}$ )	0,09	0,09		

#### 4.3.3.4 Pengujian Hipotesis

Hasil estimasi parameter yang diperoleh pada sub bab ini sama dengan hasil estimasi parameter yang diperoleh pada sub bab 4.3.2, sehingga hasil pengujian hipotesisnya tentu juga sama antara data ekstrem hasil simulasi dengan periode I dan II bersifat tidak random dan data ekstrem hasil simulasi dengan periode I bersifat tidak random dan periode II bersifat random. Data ekstrem periode I berdistribusi Frechet dan data ekstrem periode II berdistribusi Weibull.

